

BAB 2. ANALISIS KESTABILAN MODEL SEQ₁Q₂IHR PENYEBARAN COVID-19 DENGAN INTERVENSI KARANTINA

Widowati¹, Melvin Brilliant² dan Eka Triyana³

^{1,2,3}Departemen Matematika FSM, Universitas Diponegoro

Email: widowati@lecturer.undip.ac.id

brilliantmelvin@gmail.com

triyanaeka03@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.15294/mtk.v1i1.91>

Abstrak

Virus yang menyerang sistem pernapasan manusia yang muncul pertama kali di provinsi Wuhan, China yang dikenal dengan nama COVID-19 (SARS COV2 n-corona virus). Dalam rangka mengurangi penyebaran virus, beberapa strategi dilakukan oleh pemerintah. Pada studi ini, model matematika penyebaran COVID-19 dikembangkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial, dengan tujuh variabel yaitu individu *susceptible*, *exposed*, *infected*, *quarantined-1* (individu terpapar yang dikarantina), *quarantined-2* (individu terinfeksi yang dikarantina), *hospitalized* (individu yang dirawat inap) dan *recovered*. Model tersebut mempunyai titik kesetimbangan non endemik (bebas penyakit) dan endemik. Titik kesetimbangan non endemik stabil jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu. Sebaliknya, titik kesetimbangan endemik stabil jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Verifikasi dari model yang telah dikembangkan dilakukan melalui simulasi numerik dengan menggunakan data dari Provinsi Jawa Tengah. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa karantina yang ketat berpotensi berhasil mengurangi dan menghambat penularan virus Covid-19.

PENDAHULUAN

Coronavirus adalah keluarga besar virus yang ditandai dengan berbentuk mahkota paku di permukaan mereka. Saat ini, ada tujuh jenis virus corona yang teridentifikasi yang dapat menular antar manusia. Coronavirus paling berbahaya yang diketahui hingga saat ini tahun adalah MERS-CoV dan SARS-CoV, dan mereka telah menyebabkan penyakit parah, seperti MERS dan SARS, masing-masing pada tahun 2003 dan 2012 (Arino, J & Portet, S., 2021; Telles, C. R. et al, 2021). Namun, pada akhir tahun 2019, di Wuhan, Cina, wabah epidemiologi baru COVID-19 muncul; itu disebabkan oleh yang baru virus corona yang disebut SARS-CoV (Solís *et al.*, 2021).

Pada tanggal 31 Desember 2019 di Wuhan, Cina, telah dilaporkan terdapat kasus pneumonia misterius yang tidak diketahui penyebabnya. Setelah diteliti lebih lanjut, ditemukan bahwa penyakit tersebut disebabkan oleh infeksi dari virus tipe baru yang merupakan keluarga coronavirus, yang kemudian diberi nama 2019 novel Coronavirus (2019-nCoV). Pada tanggal 11 Februari 2020, WHO (World Health Organization) memberi nama virus baru tersebut SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2*) dan nama penyakitnya COVID-19 (*Coronavirus Disease 2019*) (Mishra *et al.*, 2020)

Mengikuti himbauan WHO untuk membatasi, mengontrol, menunda dan mengurangi dampak COVID-19. Untuk mengatasi situasi pandemik ini, berbagai negara, termasuk Indonesia, telah melakukan sistem karantina untuk menekan angka penularan COVID-19. Pemerintah Indonesia menerapkan beberapa kebijakan untuk mengurangi penyebaran virus. Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) merupakan salah satu jenis penyelenggaraan kekarantinaan kesehatan di wilayah, selain karantina rumah, karantina rumah sakit dan karantina wilayah.

Dalam situasi pandemik wabah COVID-19, selain perkembangan ilmu kedokteran dan medis yang memiliki peran utama dalam penanggulangan COVID-19, bidang ilmu lain yang juga memiliki peran penting dalam penanggulangan COVID-19, salah satunya bidang ilmu matematika yaitu pemodelan

matematika. Menurut Widowati dan Sutimin, 2013, pemodelan matematika merupakan bidang matematika untuk mempresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam bahasa matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari permasalahan dunia nyata yang lebih tepat. Pemodelan matematika, melalui persamaan diferensial, dapat diaplikasikan untuk merepresentasikan fenomena perubahan, salah satunya yaitu dalam bidang biologi, termasuk bidang Kesehatan (Deng, X & Kong, Z., 2021; Ala'raj, M., Majdalawieh, M., & Nizamuddin, N., 2021).

Dalam berbagai kasus penyebaran penyakit, model epidemik yang digunakan untuk merepresentasikan fenomena epidemi adalah model klasik *Suspected, Infected, and Removed* (SIR) dan *Suspected, Exposed, Infected, and Removed* (SEIR). SEIR merupakan model modifikasi dari model SIR yang sebelumnya sudah digunakan (Bowong, S & Tewa, J. J., 2009; Huo, H. F. & Zou, M. X., 2016; Erandi *et al.*, 2020). Model ini dibangun dengan menggunakan sistem persamaan diferensial n -linear untuk memprediksi penyebaran Covid-19. Pengembangan model kompartemen dari epidemi Covid -19 dengan model SEIHR (Rahman, B *et al.*, 2021) dan berbagai penelitian penyebaran Covid-19 (Ndairou, F *et al.*, 2020; Radha, M & Balamuralitharan, S., 2020; Serhani, M & Labbardi, H., 2020; Sugiyanto, S & Abrori, M., 2020). Persamaan matematis juga dapat digunakan untuk menentukan efektivitas treatment, untuk mencegah penyebaran virus (Cullenbine, C. *et al.*, 2021).

Selanjutnya, diperlukan kebijakan untuk mengantisipasi peningkatan kasus, memperlambat atau menghentikan penyebaran virus. Dengan mengidentifikasi kebijakan yang tepat untuk diterapkan. Pendekatan model sistem dinamik sangat penting untuk memprediksi kondisi masa depan dari hasil simulasi serta skenario yang dapat dipilih. Analisis interaksi antar variabel yang paling berpengaruh dapat membantu menentukan sensitivitas parameter terkait. Hal ini dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium non-endemik dan endemik.

Dalam pembahasan ini dilakukan modifikasi dari model yang telah dipublikasikan (Hu, Z et al, 2020) merepresentasikan faktor karantina dalam model tersebut. Namun mengabaikan angka kelahiran natural dan angka kematian natural, serta dilakukan penambahan kompartemen hospitalized.

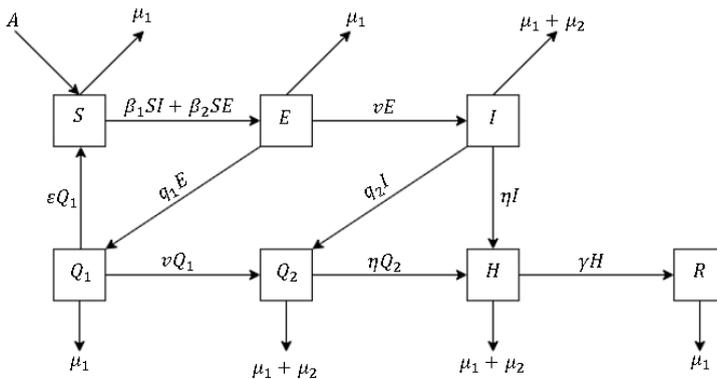
Pada model yang diusulkan terdapat tujuh kompartemen yaitu rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), *quarantined-1* (Q_1), *quarantined-2* (Q_2), rawat inap (H) dan sembuh (R) untuk membahas perkembangan COVID-19 dan memperkirakan puncaknya pandemi COVID-19.

Pengembangan Model Penyebaran Virus Covid-19 dengan Variabel Karantina

Misalkan dalam suatu populasi terdapat individu-individu yang rentan (*susceptible*), terpapar (*exposed*) dan terinfeksi (*infected*) COVID-19. Dalam model ini angka migrasi diabaikan. Diasumsikan bahwa sejumlah individu yang terpapar dan terinfeksi akan melakukan karantina sebelum ditangani oleh pihak medis, atau langsung ditangani oleh pihak medis untuk sebagian dari sub-populasi terinfeksi. Penularan diasumsikan berasal dari individu-individu rentan yang melakukan kontak dengan individu-individu terpapar dan individu-individu yang terinfeksi.

Karantina dilakukan oleh individu-individu terpapar dan terinfeksi. Individu-individu terpapar yang dikarantina dapat kembali menjadi individu rentan, karena selama karantina menunjukkan gejala COVID-19, atau menjadi individu terinfeksi, namun masih dikarantina karena menunjukkan gejala COVID-19, sebelum pada akhirnya ditangani oleh pihak medis.

Selanjutnya dikembangkan model penularan penyakit COVID-19 didemonstrasikan sebagai berikut.



Gambar 1. Model skematis SEIQ₁Q₂HR penyebaran COVID-19

Tabel 1. Variabel dan Parameter pada Model Modifikasi

	Simbol	Definisi
Variabel	S	Jumlah individu rentan (susceptible) pada waktu t
	E	Jumlah individu terpapar (exposed) pada waktu t
	I	Jumlah individu terinfeksi (infectious) pada waktu t
	Q_1	Jumlah individu terpapar yang dikarantina pada waktu t
	Q_2	Jumlah individu terinfeksi yang dikarantina pada waktu t
	H	Jumlah individu terinfeksi yang ditangani oleh pihak medis
	R	Jumlah individu yang sembuh dari COVID-19 setelah ditangani oleh pihak medis
Parameter	A	Angka pertumbuhan sub-populasi rentan
	β_1	Laju penularan COVID-19 dari individu infectious

β_2	Laju penularan COVID-19 dari individu exposed
μ_1	Angka kematian natural
μ_2	Angka kematian yang disebabkan oleh COVID-19
ε	Laju rata-rata individu terpapar yang dikarantina dan tidak memiliki gejala yang kembali menjadi individu rentan
η	Laju rata-rata individu terinfeksi dan quarantined-2 ditangani oleh pihak medis
γ	Laju rata-rata pemulihan dari COVID-19
ν	Laju rata-rata individu terpapar menjadi individu terinfeksi
q_1	Laju rata-rata individu terpapar menerapkan karantina mandiri
q_2	Laju rata-rata individu terinfeksi menerapkan karantina mandiri

Perubahan Jumlah Individu Susceptible (S)

Pertambahan jumlah individu rentan (*susceptible*) dipengaruhi oleh jumlah input populasi yang merupakan angka pertumbuhan sub-populasi rentan. Jumlah individu rentan akan berkurang saat sebagian individu rentan melakukan kontak dengan orang yang terpapar (E) atau positif COVID-19 (I), dengan fraksi seperti yang ditunjukkan di Gambar 1. Jumlah individu rentan juga akan berkurang sebanyak jumlah output yang merupakan angka migrasi keluar dari populasi tersebut. Dengan demikian pada waktu t jumlah individu rentan adalah $S(t)$ dan pada waktu $t + \Delta t$ jumlah individu rentan adalah $S(t + \Delta t)$ yang berarti:

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \text{Perubahan } S, \quad (1)$$

di mana Perubahan S adalah perubahan jumlah individu susceptible yang diukur dalam selang waktu Δt seperti yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S = (A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S) \Delta t. \quad (2)$$

Substitusikan persamaan $S(t + \Delta t) = S(t) + \text{Perubahan } S$, (2) ke persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= S(t) + (A + \varepsilon Q_1(t) - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - \mu_1 S(t)) \Delta t \\ \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} &= A + \varepsilon Q_1(t) - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - \mu_1 S(t) \\ \frac{\Delta S}{\Delta t} &= A + \varepsilon Q_1(t) - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - \mu_1 S(t). \end{aligned}$$

Laju perubahan jumlah individu adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = A + \varepsilon Q_1(t) - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - \mu_1 S(t).$$

Sehingga, diperoleh:

$$\frac{dS(t)}{dt} = A + \varepsilon Q_1(t) - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)E(t) - \mu_1 S(t).$$

Laju perubahan jumlah individu rentan (*susceptible*) dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S. \quad (3)$$

Perubahan Jumlah Individu *Exposed* (E)

Seiring berjalan waktu, sebagian populasi rentan akan terpapar dengan individu-individu dari kelas *exposed* dan *infectious*, menyebabkan perpindahan fraksi individu-individu rentan menjadi individu terpapar (*exposed*) dan menjadi salah satu faktor bertambahnya jumlah individu *exposed*.

Jumlah individu *exposed* dapat berkurang disebabkan oleh sebagian dari individu-individu *exposed* melakukan karantina dan

berpindah ke kelas *quarantined-1*, menjadi positif COVID-19 dan berpindah ke kelas *infectious*.

Mengetahui terdapat perubahan jumlah individu *exposed* baik pertambahan maupun pengurangan jumlah individu *exposed* pada setiap waktu t , maka dapat ditentukan jumlah individu *exposed* saat t adalah $E(t)$, sedangkan jumlah individu *exposed* pada saat waktu $t + \Delta t$ adalah $E(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$E(t + \Delta t) = E(t) + \text{Perubahan } E, \quad (4)$$

dengan perubahan E adalah perubahan jumlah individu *exposed* yang diukur dalam selang waktu Δt dan didefinisikan sebagai berikut sebagai berikut:

$$E = (\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - q_1 E(t) - \mu_1 E(t) - vE(t)) \Delta t. \quad (5)$$

Substitusikan (5) ke dalam persamaan (4), maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} E(t + \Delta t) &= E(t) + (\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - q_1 E(t) - \mu_1 E(t) - vE(t)) \Delta t \\ \frac{E(t + \Delta t) - E(t)}{\Delta t} &= (\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - q_1 E(t) - \mu_1 E(t) - vE(t)) \\ \frac{\Delta E}{\Delta t} &= (\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - q_1 E(t) - \mu_1 E(t) - vE(t)). \end{aligned}$$

Laju perubahan jumlah individu terpapar adalah

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = (\beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)E(t) - q_1 E(t) - \mu_1 E(t) - vE(t)).$$

Laju perubahan jumlah individu terpapar (*exposed*) dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SE - q_1 E - \mu_1 E - vE. \quad (6)$$

Perubahan Jumlah Individu Infectious (I)

Perpindahan sebagian individu-individu kelas terpapar (*exposed*) ke kelas terinfeksi (*infectious*) menjadi penyebab

bertambahnya jumlah individu kelas *infectious*. Sebagian dari individu-individu *infectious* kemudian melakukan karantina, ditangani oleh pihak medis, atau bahkan meninggal karena faktor umur dan/atau COVID-19, menyebabkan jumlah individu *infectious* berkurang.

Mengetahui terdapat perubahan jumlah individu *infectious*, baik pertambahan maupun pengurangan jumlah individu *infectious* pada setiap waktu t , maka dapat ditentukan jumlah individu *infectious* saat t adalah $I(t)$, sedangkan jumlah individu *infectious* pada saat waktu $t + \Delta t$ adalah $I(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \Delta I, \quad (7)$$

di mana Perubahan I merupakan perubahan jumlah individu *infectious* yang diukur dalam selang waktu Δt dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta I = (vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t)) \Delta t. \quad (8)$$

Substitusikan (8) ke dalam persamaan (7) dan masukkan $p_3 = 0$, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} I(t + \Delta t) &= (vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t)) \Delta t \\ \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t) \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} &= vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t). \end{aligned}$$

Laju perubahan jumlah individu terinfeksi adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t).$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dI(t)}{dt} = vE(t) - q_2 I(t) - \eta I(t) - (\mu_1 + \mu_2) I(t).$$

Laju perubahan jumlah individu terinfeksi dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I. \quad (9)$$

Perubahan Jumlah Individu Quarantined-1 (Q_1)

Kelas kompartemen *quarantined-1* (Q_1) merupakan fraksi individu-individu kelas *exposed* yang di karantina. yang berarti merupakan faktor penyebab bertambahnya jumlah individu kelas *quarantined-1*. Selanjutnya, fraksi individu-individu *quarantined-1* dapat kembali menjadi kelas *susceptible* karena selama karantina individu-individu tersebut tidak menunjukkan gejala-gejala COVID-19, atau menuju kelas *quarantined-2* karena selama karantina, individu-individu tersebut menunjukkan gejala-gejala COVID-19 dan menjadi positif COVID-19, sehingga memperpanjang masa karantananya sebelum ditangani oleh pihak medis dan berpindah menuju kelas *quarantined-2*.

Mengetahui terdapat perubahan jumlah individu *quarantined-1*, baik pertambahan maupun pengurangan jumlah individu *quarantined-1* pada setiap waktu t , maka dapat ditentukan jumlah individu *quarantined-1* saat t adalah $Q_1(t)$, sedangkan jumlah individu *infectious* pada saat waktu $t + \Delta t$ adalah $Q_1(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$Q_1(t + \Delta t) = Q_1(t) + \text{Perubahan } Q_1. \quad (10)$$

Di mana Perubahan Q_1 merupakan perubahan jumlah individu *quarantined-1* yang diukur dalam selang waktu Δt adalah:

$$Q_1 = (q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t)) \Delta t. \quad (11)$$

di mana Perubahan Q_1 merupakan perubahan jumlah individu *quarantined-1*. Dengan melakukan substitusi dari persamaan (11) ke persamaan (10), maka akan diperoleh:

$$Q_1(t + \Delta t) = Q_1(t) + (q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t)) \Delta t$$

$$\frac{Q_1(t + \Delta t) - Q_1(t)}{\Delta t} = q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t)$$

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t).$$

Laju perubahan jumlah individu *quarantined-1* adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t).$$

Sehingga, diperoleh:

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = q_1 E(t) - \varepsilon Q_1(t) - \nu Q_1(t) - \mu_1 Q_1(t).$$

Laju perubahan jumlah individu *quarantined-1* dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dQ_1}{dt} = q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1. \quad (12)$$

Perubahan Jumlah Individu *Quarantined-2* (Q_2)

Kelas kompartemen *quarantined-2* (Q_2) merupakan fraksi individu-individu kelas infectious yang melakukan karantina mandiri, yang berarti merupakan salah satu faktor penyebab bertambahnya jumlah individu kelas *quarantined-1*. Faktor lainnya yaitu fraksi individu-individu kelas *quarantined-1* yang menunjukkan gejala dan positif COVID-19, sehingga fraksi individu-individu tersebut akhirnya memperpanjang masa isolasi mandiri sebelum ditangani oleh pihak medis, mengakibatkan

perpindahan fraksi individu-individu dari kelas *quarantined-1* ke kelas *quarantined-2*. Selanjutnya, penyebab kematian individu *quarantined-2* dapat berkurang karena angka kematian natural dan angka kematian yang disebabkan oleh COVID-19.

Mengetahui terdapat perubahan jumlah individu *quarantined-2*, baik penambahan maupun pengurangan jumlah individu *quarantined-2* pada setiap waktu t , maka dapat ditentukan jumlah individu *quarantined-2* saat t adalah $Q_2(t)$, sedangkan jumlah individu *infectious* pada saat waktu $t + \Delta t$ adalah $Q_2(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \text{Perubahan } Q_2 \quad (13)$$

di mana Perubahan I_q merupakan perubahan jumlah individu *quarantined-2* yang diukur dalam selang waktu Δt dan didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_2 = (q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t)) \Delta t. \quad (14)$$

Dengan melakukan substitusi dari persamaan (14) ke persamaan (13) maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} Q_2(t + \Delta t) &= (q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t)) \Delta t \\ \frac{Q_2(t + \Delta t) - Q_2(t)}{\Delta t} &= q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t) \\ \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} &= q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t). \end{aligned}$$

Laju perubahan jumlah individu *quarantined-2* adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t).$$

Sehingga, diperoleh

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = q_2 I(t) + v Q_1(t) - \eta Q_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) Q_2(t).$$

Laju perubahan jumlah individu *quarantined-2* dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dQ_2}{dt} = q_2 I + v Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2. \quad (15)$$

Perubahan Jumlah Individu *Hospitalized* (H)

Kelas kompartemen *hospitalized* (H) merupakan fraksi individu-individu kelas *quarantined-2* yang ditangani oleh pihak medis. Selanjutnya, diasumsikan bahwa individu kelas *recovered* hanya dapat berkurang karena kematian natural (kematian selain dari COVID-19). Dengan demikian pada waktu t jumlah individu *hospitalized* adalah $H(t)$ dan pada waktu $t + \Delta t$, jumlah individu *hospitalized* adalah $H(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + H. \quad (16)$$

Maka perubahan jumlah individu *hospitalized* per satuan waktu yang diukur dalam selang waktu Δt adalah:

$$H = (\eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2) H(t)) \Delta t. \quad (17)$$

di mana Perubahan I_q merupakan perubahan jumlah individu hospitalized dalam selang waktu Δt . Dengan melakukan substitusi dari persamaan (17) ke persamaan (16), maka akan diperoleh:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + (\eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2)H(t))\Delta t$$

$$\frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2)H(t)$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = \eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2)H(t).$$

Laju perubahan jumlah individu hospitalized adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta t} = \eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2)H(t).$$

Sehingga, diperoleh

$$\frac{dH(t)}{dt} = \eta I(t) + \eta Q_2(t) - \gamma H(t) - (\mu_1 + \mu_2)H(t).$$

Laju perubahan jumlah individu hospitalized dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dt} = \eta I + \eta Q_2 - \gamma H - (\mu_1 + \mu_2)H. \quad (18)$$

Perubahan Individu Recovered (R)

Kelas kompartemen *recovered* (R) merupakan fraksi individu-individu *hospitalized* yang telah sembuh dari penyakit COVID-19. Selanjutnya, diasumsikan bahwa individu kelas *recovered* hanya dapat berkurang karena kematian natural. Dengan demikian, jumlah individu pada waktu t adalah $R(t)$ dan

pada waktu $(t + \Delta t)$, jumlah individu recovered adalah $R(t + \Delta t)$, yang berarti:

$$R(t + \Delta t) = R(t) + R. \quad (19)$$

Maka perubahan jumlah individu *recovered* per satuan waktu yang diukur dalam selang waktu Δt adalah:

$$R = \gamma H(t) - \mu R(t). \quad (20)$$

Dengan melakukan substitusi dari persamaan (20) ke persamaan (19), akan diperoleh:

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t) &= R(t) + \gamma H(t) - \mu_1 R(t) \\ \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} &= \gamma H(t) - \mu_1 R(t) \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} &= \gamma H(t) - \mu_1 R(t). \end{aligned}$$

Laju perubahan jumlah individu *recovered* adalah:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \gamma H(t) - \mu_1 R(t).$$

Sehingga, diperoleh $\frac{dR(t)}{dt} = \gamma H(t) - \mu_1 R(t)$.

Laju perubahan jumlah individu *recovered* dalam bentuk persamaan diferensial secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma H - \mu_1 R. \quad (21)$$

Dari formulasi model persamaan (3),(9),(12),(15),(18),dan (21), maka diperoleh sistem persamaan model matematika

penyebaran penyakit COVID-19 seperti ditunjukkan pada persamaan (22)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S \\ \frac{dE}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E \\ \frac{dI}{dt} = \nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I \\ \frac{dQ_1}{dt} = q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} = q_2 I + \nu Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2 \\ \frac{dH}{dt} = \eta I + \eta Q_2 - \gamma H - (\mu_1 + \mu_2) H \\ \frac{dR}{dt} = \gamma H - \mu_1 R \end{array} \right. , \quad (22)$$

di mana total populasi N adalah

$$N = S + E + I + Q_1 + Q_2 + H + R. \quad (23)$$

MENENTUKAN KEPOSITIFAN DAN KETERBATASAN SOLUSI

Dalam rangka menganalisis apakah model COVID-19 seperti pada (22) mempunyai makna secara epidemik, langkah awal yang dilakukan adalah membuktikan bahwa variabel-variabelnya dalam keadaan positif. Hal ini berarti bahwa solusi dari sistem persamaan dengan kondisi awal positif haruslah positif untuk setiap $t > 0$.

Teorema 1 Misalkan $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $Q_1(0) \geq 0$, $Q_2(0) \geq 0$, $H(0) \geq 0$, dan $R(0) \geq 0$, maka solusi $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $H(t)$, dan $R(t)$ dari model (22) adalah positif untuk setiap $t > 0$.

Bukti:

Diketahui nilai awal $S(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, Q_1(0) \geq 0, Q_2(0) \geq 0, H(0) \geq 0$, dan $R(0) \geq 0$, akan ditunjukkan bahwa solusi $S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0, Q_1(t) > 0, Q_2(t) > 0, H(t) > 0$, dan $R(t) > 0$ untuk setiap $t > 0$.

Perhatikan persamaan diferensial untuk perubahan jumlah individu susceptible adalah sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S$$

$$\frac{dS}{dt} = A + \varepsilon Q_1 - (\beta_1 I + \beta_2 E + \mu_1) S.$$

Persamaan diatas dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} + pS(t) = A + \varepsilon Q_1(t) \quad \text{dimana } p = \beta_1 I - \beta_2 E - \mu_1$$

Dengan menggunakan metode faktor integral, dapat diperoleh:

$$\frac{dS(t)}{dt} \cdot e^{\int_0^t p d\theta} + pS(t) \cdot e^{\int_0^t p d\theta} = (A + \varepsilon \cdot Q_1(t)) e^{\int_0^t p d\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(S(t) \cdot e^{\int_0^t p d\theta} \right) = (A + \varepsilon \cdot Q_1(t)) e^{\int_0^t p d\theta}$$

Selanjutnya, diperoleh:

$$S(t) \cdot e^{\int_0^t p d\theta} - S(0) = \int_0^t (A + \varepsilon Q_1(t)) e^{\int_0^t p d\theta} dt$$

$$S(t) = S(0) e^{-\int_0^t p d\theta} + e^{-\int_0^t p d\theta} \left\{ \int_0^t (A + \varepsilon Q_1(t)) e^{\int_0^t p d\theta} dt \right\} > 0$$

$$\forall t > 0$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh bahwa $E(t) > 0, I(t) > 0, Q_1(t) > 0, Q_2(t) > 0, H(t) > 0$, dan $R(t) > 0$. Maka solusi dari $S(t), E(t), I(t), Q_1(t), Q_2(t), H(t)$, dan $R(t)$ dari model sistem dinamik (22) adalah positif untuk setiap $t > 0$.

Selanjutnya, keterbatasan solusi dari model (22) dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 2 *Daerah fisibel dari model (22) didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Omega = \{(S(t), E(t), I(t), Q_1(t), Q_2(t), H(t), R(t))\}, \in \mathbf{R}_+^7 : 0 \leq N(t) \leq U$$

dengan $U = \max \left\{ N(0), \frac{A}{\mu_1} \right\}$ adalah positif invarian untuk sistem persamaan (22).

Bukti:

Diberikan

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + H(t) + R(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dH}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = (A + \varepsilon Q_1 - \beta SI - \beta \sigma SE - \mu_1 S) + (\beta SI + \beta \sigma SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E)$$

$$+ (\nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I) + (q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1)$$

$$+ (q_2 I + \nu Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2) + (\eta I + \eta Q_2 - \gamma H - (\mu_1 + \mu_2) H)$$

$$+ (\gamma H - \mu R)$$

$$\frac{dN}{dt} = A + \varepsilon Q_1 - \beta SI - \beta \sigma SE - \mu_1 S + \beta SI + \beta \sigma SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E$$

$$+ \nu E - q_2 I - \eta I - \mu_1 I - \mu_2 I + q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1 + q_2 I + \nu Q_1$$

$$- \eta Q_2 - \mu_1 Q_2 - \mu_2 Q_2 + \eta I + \eta Q_2 - \gamma H - \mu_1 H - \mu_2 H - \mu_1 R$$

$$\frac{dN}{dt} = A - \mu_1 S - \mu_1 E - \mu_1 I - \mu_2 I - \mu_1 Q_1 - \mu_1 Q_2 - \mu_2 Q_2 - \mu_1 H - \mu_2 H - \mu_1 R$$

$$\frac{dN}{dt} \leq A - \mu_1 S - \mu_1 E - \mu_1 I - \mu_2 I - \mu_1 Q_1 - \mu_1 Q_2 - \mu_1 H - \mu_1 R$$

$$\frac{dN}{dt} \leq A - \mu_1 N.$$

Dengan nilai awal $N(0)$ yang merepresentasikan total populasi pada saat $t = 0$, diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} e^{\int_0^t \mu_1 dy} + \mu_1 N(t) e^{\int_0^t \mu_1 dy} \leq A e^{\int_0^t \mu_1 dy}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mu_1 N(t) e^{\int_0^t \mu_1 dy} \right) \leq A e^{\int_0^t \mu_1 dy}$$

$$N(t) e^{\int_0^t \mu_1 dy} - N(0) \leq \frac{1}{\mu_1} \int_0^t A e^{\int_0^t \mu_1 dy} dt$$

$$N(t) \leq \frac{A}{\mu_1} + N(0) e^{-\mu_1 t}.$$

$$N(t) \leq \frac{A}{\mu_1}$$

Untuk $t \rightarrow \infty$, kita peroleh

$N(t)$ terbatas ke atas jika limit pada batas atas $N(t)$ untuk t mendekati tak hingga.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{\mu_1} + N(0) e^{-\mu_1 t} \\ &= \frac{A}{\mu_1}, \end{aligned}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t)$$

ada, yang berarti $N(t)$ terbatas ke atas, sehingga terbukti bahwa bahwa daerah fisibel dari sistem persamaan (22) adalah positif invarian. ■

MENENTUKAN BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar (N_0) merupakan jumlah rata-rata jumlah kasus infeksi baru dalam suatu populasi. Jika $N_0 < 1$, penyebaran penyakit dapat dikendalikan dan tidak akan menjadi epidemic (Bärwolff, G., 2021; Martínez, V., 2021; Zewdie, A. D. & Gakkhar, S., 2020). Namun jika $N_0 > 1$, maka setiap individu yang terinfeksi akan menyebarkan menyebarkan penyakit kepada individu lain, sehingga dapat mengakibatkan terjadinya epidemic (Yang, C & Wang, J. 2020; Liu, X & Yang, L., 2012). Bilangan reproduksi didapat dari metode *Next Generation Matrix* (NGM) yaitu membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu terinfeksi (Schechter, 2021), pada model sistem dinamik ini yang

menjadi kompartemen yang terinfeksi adalah kelas exposed (E) dan *infectious* (I).

Misalkan $X = [E \quad I]^T$, sehingga dapat ditulis sebagai

$$\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X) = \begin{bmatrix} \beta_1 SI + \beta_2 SE - q_1 E - \mu_1 E - vE \\ vE - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I \end{bmatrix},$$

di mana $F(x)$ merupakan matriks yang berisi laju infeksi tahapan awal, sedangkan $V(x)$ merupakan matriks yang berisi laju perpindahan populasi yang telah terinfeksi, dengan nilai $F(x)$ dan $V(x)$ adalah

$$F(X) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 SI + \beta_2 SE \\ 0 \end{bmatrix},$$

dan

$$V(X) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 E + \mu_1 E + vE \\ q_2 I + \eta I + (\mu_1 + \mu_2) I - vE \end{bmatrix}.$$

Misalkan F dan V merupakan matriks Jacobian dari $F(x)$ dan $V(x)$ serta mensubstitusikan nilai variabel dengan titik

kesetimbangan $K^0 (S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right)$, maka diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial E} & \frac{\partial F_1}{\partial I} \\ \frac{\partial F_2}{\partial E} & \frac{\partial F_2}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 S & \beta_1 S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 A}{\mu_1} & \frac{\beta_1 A}{\mu_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial E} & \frac{\partial V_1}{\partial I} \\ \frac{\partial V_2}{\partial E} & \frac{\partial V_2}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + \mu_1 + v & 0 \\ -v & q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk menentukan invers dari matriks V digunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM).

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \text{Adj}(V)$$

$$V^{-1} = \frac{1}{q_1 + \eta + \mu_1 + \mu_2} \begin{bmatrix} q_1 + \eta + \mu_1 + \mu_2 & 0 \\ v & q_1 + \mu_1 + v \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh invers matrix V , sebagai berikut:

$$NGM = F(V)^{-1}$$

$$NGM = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 A}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + v)} + \frac{\beta_1 A v}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + v)(q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2)} & \frac{\beta_1 A}{\mu_1 (q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bilangan reproduksi (\mathfrak{R}_0) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari NGM yang ditentukan menggunakan titik kesetimbangan non-endemik. Dengan bantuan software Maple, maka nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta_2 A}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + v)} + \frac{\beta_1 A v}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + v)(q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2)}.$$

TITIK KESETIMBANGAN (*EQUILIBRIUM POINT*)

Titik kesetimbangan adalah titik di mana tidak ada perubahan jumlah individu pada setiap kelas kompartemen, dinotasikan dengan $K(S, E, I, Q_1, Q_2, H, R)$. Titik kesetimbangan diperoleh jika:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0.$$

Perhatikan pada sistem (22), bahwa yang mem memuat H dan R terpisah dari yang lain, sehingga tidak berpengaruh terhadap sistem dan dapat direduksi menjadi hanya S, E, I, Q_1 , dan Q_2 , sehingga diperoleh:

$$(24) \quad \begin{cases} A + \varepsilon Q_1 - \beta SI - \beta \sigma SE - \mu_1 S = 0 \\ \beta SI + \beta \sigma SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E = 0 \\ \nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I = 0, \\ q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1 = 0 \\ q_2 I + \nu Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2 = 0 \end{cases}$$

dengan $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$ dan $H \geq 0$. Penyelesaian sistem persamaan (24) memiliki dua keadaan titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $K_0(S, E, I, Q_1, Q_2)$ dan titik kesetimbangan endemik $K_1(S^*, E^*, I^*, Q_1^*, Q_2^*)$.

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (non-Endemik)

Titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 adalah suatu keadaan seimbang di mana populasi bebas dari penyakit atau sudah tidak ada lagi individu yang terinfeksi penyakit COVID-19. Titik kesetimbangan bebas penyakit berarti nilai-nilai kelas kompartemen yang terinfeksi adalah nol ($I = 0$), sehingga sistem persamaan (24) menjadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S = 0 \Rightarrow S^0 = \frac{A}{\mu_1} \\ \beta_1 SI + \beta_2 SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E = 0 \Rightarrow E^0 = 0 \\ \nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I = 0 \Rightarrow I^0 = 0 \\ q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1^0 = 0 \\ q_2 I + \nu Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2^0 = 0 \end{array} \right. .$$

sehingga, diperoleh titik kesetimbangan non-endemik sebagai berikut:

$$K^0(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik penyakit COVID-19 adalah suatu keadaan setimbang di mana dalam suatu populasi terdapat individu yang terinfeksi, sehingga dapat menyebarkan infeksi ke individu lain dan menyebabkan penyakit COVID-19 menjadi endemik. Karena di dalam titik kesetimbangan endemik selalu terdapat individu yang terinfeksi, maka kelas-kelas kompartemen yang menginfeksi dan terinfeksi tidak nol ($I \neq 0$). Oleh karena itu, sistem dari persamaan (24) menjadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \varepsilon Q_1^* - \beta_1 S^* I^* - \beta_2 S^* E^* - \mu_1 S^* = 0 \\ \beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^* - q_1 E^* - \mu_1 E^* - v E^* = 0 \\ v E^* - q_2 I^* - \eta I^* - (\mu_1 + \mu_2) I^* = 0. \\ q_1 E^* - \varepsilon Q_1^* - v Q_1^* - \mu_1 Q_1^* = 0 \\ q_2 I^* + v Q_1^* - \eta Q_2^* - (\mu_1 + \mu_2) Q_2^* = 0 \end{array} \right.$$

Dengan bantuan alat hitung Maple, diperoleh nilai semua variabel titik kesetimbangan endemik, menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik $E_1(S^*, E^*, I^*, Q_1^*, Q_2^*)$ ada, yaitu:

$$S^* = \frac{(q_1 + \mu_1 + v)(\eta + \mu_1 + \mu_2 + q_2)}{\eta\beta_2 + v\beta_1 + \beta_2\mu_1 + \beta_2\mu_2 + \beta_2q_2}$$

$$E^* = \frac{(\eta + \mu_1 + \mu_2 + q_2)I^*}{v}$$

$$I^* = -\frac{v(\mu_1 + v + \varepsilon)(q_1 + \mu_1 + v)(1 - \mathfrak{R}_0)}{(\mu_1 + v)(\mu_1 + q_1 + v + \varepsilon)(\eta\beta_2 + v\beta_1 + \beta_2\mu_1 + \beta_2\mu_2 + \beta_2q_2)}$$

$$Q_1^* = \frac{(q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2)q_1 I^*}{v(v + \mu_1 + \varepsilon)}$$

$$Q_2^* = \frac{I^*(\eta q_1 + v q_2 + \varepsilon q_2 + q_1 \mu_1 + \mu_1 q_2 + \mu_2 q_1 + q_1 q_2)}{(\mu_1 + v + \varepsilon)(\mu_1 + \eta + \mu_2)}.$$

ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Non-Endemik

Analisis kestabilan digunakan untuk mengetahui perilaku di sekitar titik kesetimbangan. Kesetimbangan non-endemik adalah kasus di mana tidak ada individu yang terinfeksi oleh COVID-19 dalam suatu populasi, dinotasikan dengan:

$$K^0 (S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Kestabilan titik kesetimbangan non-endemik untuk sistem persamaan (22) disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 3 *Jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan non-endemik K^0 akan stabil asimtotik lokal. Sebaliknya jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, maka K^0 tidak stabil.*

Bukti:

Dalam melakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, terlebih dahulu melakukan pelinieran terhadap sistem persamaan (22). Namun perhatikan bahwa kelas individu H dan R tidak berpengaruh terhadap sistem, sehingga kedua kompartemen tersebut direduksi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = f_1(S, E, I, Q_1, Q_2) = A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S \\ \frac{dE}{dt} = f_2(S, E, I, Q_1, Q_2) = \beta_1 SI + \beta_2 SE - q_1 E - \mu_1 E - \nu E \\ \frac{dI}{dt} = f_3(S, E, I, Q_1, Q_2) = \nu E - q_2 I - \eta I - (\mu_1 + \mu_2) I \\ \frac{dQ_1}{dt} = f_4(S, E, I, Q_1, Q_2) = q_1 E - \varepsilon Q_1 - \nu Q_1 - \mu_1 Q_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} = f_5(S, E, I, Q_1, Q_2) = q_2 I + \nu Q_1 - \eta Q_2 - (\mu_1 + \mu_2) Q_2 \end{array} \right. \quad (25)$$

di mana $f_i(S, E, I, Q_1, Q_2)$, untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dilinearkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_i(S, E, I, Q_1, Q_2, H) &= f_i(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0) + \frac{\partial f_i}{\partial S}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)(S - S^0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial E}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)(E - E^0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial I}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)(I - I^0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial Q_1}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)(Q_1 - Q_1^0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial Q_2}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)(Q_2 - Q_2^0).
 \end{aligned}$$

Masukkan nilai-nilai titik kesetimbangan ke dalam $f_i(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0)$, maka akan diperoleh $f_i(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0) = 0$, untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Selanjutnya, dengan memisalkan $(S - S^0) = \hat{S}$, $(E - E^0) = \hat{E}$, $(I - I^0) = \hat{I}$, $(Q_1 - Q_1^0) = \hat{Q}_1$, dan $(Q_2 - Q_2^0) = \hat{Q}_2$, maka $f_i(S, E, I, Q_1, Q_2)$ menjadi:

$$\begin{aligned}
 f_i(S, E, I, Q_1, Q_2, H) &= \frac{\partial f_i}{\partial S}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0)\hat{S} + \frac{\partial f_i}{\partial E}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0)\hat{E} \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial I}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0)\hat{I} + \frac{\partial f_i}{\partial Q_1}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0)\hat{Q}_1 \\
 &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial Q_2}(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0)\hat{Q}_2.
 \end{aligned}$$

dan dari bentuk matriks untuk sistem persamaan diferensial yang dilinearisasikan, diperoleh matriks Jacobian $J(E_0)$ untuk titik kesetimbangan non-endemik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dQ_1}{dt} \\ \frac{dQ_2}{dt} \end{bmatrix} = J(K_0) \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hat{E} \\ \hat{I} \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dQ_1}{dt} \\ \frac{dQ_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 I^0 - \beta_2 E^0 - \mu_1 & -\beta_2 S^0 & -\beta_1 S^0 & \varepsilon & 0 \\ \beta_1 I^0 + \beta_2 E^0 & \beta_2 S^0 - q_1 - \mu_1 - v & \beta_1 S^0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -q_2 - \eta - (\mu_1 + \mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & -\varepsilon - v - \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & v & \eta - (\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hat{E} \\ \hat{I} \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Persamaan (26) merupakan linierisasi dari sistem persamaan diferensial dalam bentuk matriks, sehingga diperoleh matriks Jacobian $J(K_0)$ sebagai berikut:

$$J(K_0) = \begin{bmatrix} -\beta I^0 - \beta \sigma E^0 - \mu_1 & -\beta \sigma S^0 & -\beta S^0 & \varepsilon & 0 \\ \beta I^0 + \beta \sigma E^0 & \beta \sigma S^0 - q_1 - \mu_1 - v & \beta S^0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -q_2 - \eta - (\mu_1 + \mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & -\varepsilon - v - \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & v & \eta - (\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix}$$

Titik kesetimbangan non-endemik

$$K^0(S^0, E^0, I^0, Q_1^0, Q_2^0, H^0) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$$

dikatakan stabil asimtotik lokal jika nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian-nya adalah negatif. Dengan menghitung $\det(\lambda I - J(K_0)) = 0$, di mana λ merupakan nilai eigen dari matriks $J(K_0)$ dan I merupakan matriks identitas, maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(\lambda + \mu_1)(\lambda + \varepsilon + v + \mu_1)(\lambda - \eta + \mu_1 + \mu_2)(\lambda + q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2) \left(\lambda - \frac{\beta \sigma A - \mu_1^2 - q_1 \mu_1 - v \mu_1}{\mu_1} \right) = 0,$$

yang berarti nilai-nilai eigennya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu_1 & \lambda_4 &= -q_2 - \eta - \mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_2 &= -\varepsilon - v - \mu_1 & \lambda_5 &= \frac{\beta_2 A - \mu_1^2 - q_1 \mu_1 - v \mu_1}{\mu_1} \\ \lambda_3 &= \eta - \mu_1 - \mu_2 \end{aligned} \quad (27)$$

Perhatikan bahwa matriks $J(E_0)$ memiliki tiga nilai eigen yang negatif dengan ketat serta nilai λ_3 dan λ_5 . Nilai eigen λ_3 dan

λ_5 bernilai negatif jika $\eta < \mu_1 + \mu_2$ dan $\beta\sigma A < \mu_1^2 + q_1\mu_1 + v\mu_1$. Karena diperoleh tiga nilai eigen negatif dan dua nilai eigen negatif bersyarat dari matriks Jacobian $J(K_0)$, maka dapat dikatakan bahwa titik kesetimbangan non-endemik adalah stabil asimtotik lokal untuk $\mathfrak{R}_0 < 1$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah kasus di mana penyakit terjadi dalam suatu populasi dan memungkinkan terjadinya transfer penyakit di dalam populasi tersebut. Titik kesetimbangan endemik ditunjukkan dengan:

$$K^* = (S^*, E^*, I^*, Q_1^*, Q_2^*),$$

di mana $S^* \neq 0, E^* \neq 0, I^* \neq 0, Q_1^* \neq 0, Q_2^* \neq 0$ dan memenuhi sistem persamaan:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \varepsilon Q_1^* - \beta_1 S^* I^* - \beta_2 S^* E^* - \mu_1 S^* = 0 \\ \beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^* - q_1 E^* - \mu_1 E^* - v E^* = 0 \\ v E^* - q_2 I^* - \eta I^* - (\mu_1 + \mu_2) I^* = 0. \\ q_1 E^* - \varepsilon Q_1^* - v Q_1^* - \mu_1 Q_1^* = 0 \\ q_2 I^* + v Q_1^* - \eta Q_2^* - (\mu_1 + \mu_2) Q_2^* = 0 \end{array} \right. \tag{28}$$

Kestabilan titik kesetimbangan non-endemik untuk sistem persamaan (22) disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 3.4 *Jika $\mathfrak{R}_0 > 1$, maka titik kesetimbangan endemik K^* akan stabil asimtotik. Sebaliknya jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka K^* tidak stabil.*

Bukti:

Untuk membuktikan kestabilan titik kesetimbangan endemik, akan dilakukan dengan menggunakan metode Lyapunov. Dengan menggunakan suatu fungsi Lyapunov yang sering digunakan dalam model ekologi dan model epidemik berbentuk sebagai berikut (Li, J; 2011):

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right). \quad (29)$$

Menyesuaikan dengan (29), dibentuk suatu fungsi $L : \Omega \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, dengan:

$$\begin{aligned} L(S, E, I, Q_1, Q_2) = & \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) \\ & + a_2 \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + a_3 \left(Q_1 - Q_1^* - Q_1^* \ln \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) \\ & + a_4 \left(Q_2 - Q_2^* - Q_2^* \ln \frac{Q_2}{Q_2^*} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

di mana $\forall (S, E, I, Q_1, Q_2, R) \in \Omega$ dan a_1, a_2, a_3 , dan a_4 merupakan bilangan riil. Fungsi L merupakan fungsi Lyapunov karena memenuhi definisi fungsi Lyapunov yang akan ditunjukkan sebagai berikut:

Fungsi L kontinu pada Ω karena fungsi L memuat logaritma. dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada Ω .

Untuk sembarang $K = (S, E, I, Q_1, Q_2) \in \Omega$ dengan $K \neq K^*$, maka $L(t) > 0$, selanjutnya jika $K = K^*$, maka $L(t) = 0$.

Akan ditunjukkan $L(t) > 0$ ketika $K \neq K^*$.

Misalkan $\frac{K}{K^*} = a$ dan $g(a) = K - K^* - K^* \ln \frac{K}{K^*}$, maka:

$$\begin{aligned} g(a) &= K^* \left(\frac{K}{K^*} - 1 - \ln \frac{K}{K^*} \right) \\ &= K^* (a - 1 - \ln a). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa titik $a = 1$ merupakan titik minimum dari $g(a)$ dengan $g(1) = 0$, karena $g'(1) = 0$ dan $g''(a) = \frac{1}{a^2} > 0$. Dengan demikian diperoleh

$$g(a) = K - K^* - K^* \ln \frac{K}{K^*} > 0, \text{ untuk } K \neq K^*$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan titik kesetimbangan K^* merupakan titik minimum global dilakukan dengan memperoleh matriks Hessian di K^* yaitu:

$$H(K^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial E} & \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial I} & \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial E} & \frac{\partial^2 L}{\partial E^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial I} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial I} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial I} & \frac{\partial^2 L}{\partial I} & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial Q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial Q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial Q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial Q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{S^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{E^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{I^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_3}{Q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{Q_2} \end{bmatrix}.$$

Matriks $H(K^*)$ definit positif karena

$$\det(H(K^*)) = \frac{a_1 a_2 a_3}{S^* E^* I^* Q_1^* Q_2^*} > 0.$$

Selanjutnya, ketika $K = K^*$ diperoleh $L(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
L(S^*, E^*, I^*, Q_1^*, Q_2^*) &= \left(S^* - S^* - S^* \ln \frac{S^*}{S^*} \right) + a_1 \left(E^* - E^* - E^* \ln \frac{E^*}{E^*} \right) \\
&\quad + a_2 \left(I^* - I^* - I^* \ln \frac{I^*}{I^*} \right) + a_3 \left(Q_1^* - Q_1^* - Q_1^* \ln \frac{Q_1^*}{Q_1^*} \right) \\
&\quad + a_4 \left(Q_2^* - Q_2^* - Q_2^* \ln \frac{Q_2^*}{Q_2^*} \right) \\
&= (S^* \ln(1)) + a_1 (E^* \ln(1)) + a_2 (I^* \ln(1)) + a_3 (Q_1^* \ln(1)) \\
&\quad + a_4 (Q_2^* \ln(1)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $L(t) > 0$

ketika $K \neq K^*$ dengan $K = (S, E, I, Q_1, Q_2) \in \Omega$, $V(t) = 0$ ketika $K = K^*$, dan K^* merupakan peminimum global.

Turunan fungsi L terhadap t adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial L}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial L}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial L}{\partial Q_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{\partial L}{\partial Q_2} \frac{dQ_2}{dt} \\
\frac{dL}{dt} &= \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (A + \varepsilon Q_1 - \beta_1 SI - \beta_2 SE - \mu_1 S) \\
&\quad + \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) (\beta SI + \beta \sigma SE - B_1 E) + \left(1 - \frac{I^*}{I} \right) (vE - B_2 I) \\
&\quad + \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) (q_1 E - B_3 Q) + \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) (q_2 I + v Q_1 - B_4 Q_2),
\end{aligned} \tag{31}$$

di mana:

$$\begin{aligned}
B_1 &= (q_1 + \mu_1 + v) \\
B_2 &= (q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2) \\
B_3 &= (\varepsilon + v + \mu_1) \\
B_4 &= (\eta + \mu_1 + \mu_2).
\end{aligned} \tag{32}$$

Hubungan antara S^* , E^* , I^* , Q_1^* , dan Q_2^* dengan persamaan (32) dan (28) adalah sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \varepsilon Q_1^* = -\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^* + \mu_1 S^* \\ \beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^* = B_1 E^* \\ v E^* = B_2 I^* \\ q_1 E^* = B_3 Q_1^* \\ q_2 I^* + v Q_1^* = B_4 Q_2^* \end{array} \right. \quad . \quad (33)$$

Sehingga persamaan (31) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{S - S^*}{S} \right) + \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*) \\ & + \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (\varepsilon Q_1 - \varepsilon Q_1^*) + \beta_1 S^* I + \beta_2 S^* E - \beta_1 S I - \beta_2 S E \\ & + a_1 \beta_1 S^* I^* \left(a - \frac{S E^* I}{S^* E I^*} \right) + a_1 \beta_2 S E \left(1 - \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \beta_1 S I + a_1 \beta_2 S E \\ & - a_1 B_1 E + a_2 v E^* \left(1 - \frac{E I^*}{E^* I} \right) + a_2 v E - a_2 B_2 I + a_3 q_1 E^* \left(1 - \frac{E Q_1^*}{E^* Q_1} \right) \\ & + a_3 q_1 E - a_3 B_3 Q_1 + a_4 q_2 I^* \left(1 - \frac{I Q_2^*}{I^* Q_2} \right) + a_4 v Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1 Q_2^*}{Q_1^* Q_2} \right) + a_4 q_2 I \\ & + a_4 v Q_1 - a_4 B_4 Q_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Untuk menyederhanakan penulisan pada (34), dilakukan

pemisalan $\left(\frac{S^*}{S}, \frac{E^*}{E}, \frac{I^*}{I}, \frac{Q_1^*}{Q_1}, \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$, sehingga persamaan (34) menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) + (1 - y_0)(\beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*) \\
& + (1 - y_0)(\varepsilon Q_1 - \varepsilon Q_1^*) + \beta_1 S^* I + \beta_2 S^* E - \beta_1 SI - \beta_2 SE \\
& + a_1 \beta_1 S^* I^* \left(1 - \frac{y_1}{y_2} \right) + a_1 \beta_2 S^* E^* \left(1 - \frac{1}{y_0} \right) + a_1 \beta_1 SI + a_1 \beta_2 SE - a_1 B_1 E \\
& + a_2 v E^* \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) + a_2 v E - a_2 B_2 I + a_3 q_1 E^* \left(1 - \frac{y_3}{y_1} \right) + a_3 q_1 E - a_3 B_3 Q_1 \\
& + a_4 q_2 I^* \left(1 - \frac{y_4}{y_2} \right) + a_4 v Q_1^* \left(1 - \frac{y_4}{y_3} \right) + a_4 q_2 I + a_4 v Q_1 - a_4 B_4 Q_2. \tag{35}
\end{aligned}$$

Koefisien-koefisien dari SE, SI, E, I, Q_1 dan Q_2 harus nol, namun perhatikan bahwa koefisien Q_2 adalah tunggal. Untuk menghilangkan Q_2 , dilakukan pemisalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
-a_4 B_4 Q_2 &= -a_4 B_4 Q_2^* \frac{Q_2}{Q_2^*} \\
&= -a_4 (q_2 I^* + v Q_1^*) \frac{Q_2}{Q_2^*} \\
&= -a_4 q_2 I^* \frac{1}{y_4} - a_4 v Q_1^* \frac{1}{y_4}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk menghilangkan $SE, SI, E, I,$ dan Q_1 dilakukan dengan membuat koefisiennya adalah nol, yaitu dengan membuat syarat-syarat untuk menentukan nilai $a_1, a_2, a_3,$ dan a_4 sebagai berikut:

$$\begin{cases}
1 - a_1 = 0 \\
a_1 \beta_2 S^* - a_1 B_1 + a_2 v + a_3 q_1 = 0 \\
a_1 \beta_1 S^* - a_2 B_2 + a_4 q_2 = 0 \\
\varepsilon - a_3 B_3 + a_4 v = 0
\end{cases}. \tag{36}$$

Untuk sementara, nilai a_1, a_2, a_3 , dan a_4 dibiarkan tidak diketahui.

Mengetahui koefisien SE, SI, E, I, dan Q_1 adalah nol, dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S-S^*)^2}{S} \right) + a_1 \beta_1 S^* I^* \left(2 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} \right) \\ & + a_1 \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right) + a_2 v E^* \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) + a_3 q_1 E^* \left(1 - \frac{y_3}{y_1} \right) \\ & + a_4 q_2 I^* \left(1 - \frac{y_4}{y_2} - \frac{1}{y_4} \right) + a_4 v Q_1^* \left(1 - \frac{y_4}{y_3} - \frac{1}{y_4} \right) \\ & + \varepsilon Q_1^* \left(y_0 - 1 - \frac{y_0}{y_3} \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Selanjutnya, dengan memodifikasi baris kedua (36) akan diperoleh:

$$\begin{aligned} a_1 \beta_2 S^* E^* + a_2 v E^* + a_3 q_1 E^* &= a_1 B_1 E^* \\ a_1 \beta_2 S^* E^* + a_2 v E^* + a_3 q_1 E^* &= a_1 \beta_1 S^* I^* + \beta_2 S^* E^*. \end{aligned}$$

Dari baris pertama (37) dapat disimpulkan bahwa $a_1 = 1$, sehingga hasil modifikasi baris kedua (37) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\beta_1 S^* I^* = a_2 v E^* + a_3 q_1 E^*. \tag{38}$$

Dengan melakukan hal yang sama terhadap baris ketiga pada (37), akan diperoleh:

$$\begin{aligned} a_1 \beta_1 S^* I^* + a_4 q_2 I^* &= a_2 B_2 I^* \\ a_1 \beta_1 S^* I^* + a_4 q_2 I^* &= a_2 v E^*. \end{aligned}$$

Mengetahui $a_1 = 1$, hasil modifikasi baris ketiga (37) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\beta_1 S^* I^* = a_2 v E^* - a_4 q_2 I^*. \tag{39}$$

Dari (38) dan (39) dapat dibentuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \beta_1 S^* I^* = a_2 v E^* + a_3 q_1 E^* \\ \beta_1 S^* I^* = a_2 v E^* - a_4 q_2 I^* \end{cases} \tag{40}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (40), diperoleh:

$$a_3q_1E^* + a_4q_2I^* = 0. \quad (41)$$

Dari persamaan (41), persamaan (37) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S-S^*)^2}{S} \right) + \beta_1 S^* I^* \left(2 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} \right) \\ & + \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right) + a_2 v E^* \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) + a_4 v Q_1^* \left(1 - \frac{y_4}{y_3} - \frac{1}{y_4} \right) \\ & + \varepsilon Q_1^* \left(y_0 - 1 - \frac{y_0}{y_3} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Selanjutnya, dari (33) dan (36) diperoleh syarat-syarat:

$$\begin{cases} a_3 B_3 Q_1^* = a_3 q_1 E^* \\ a_3 B_3 Q_1^* = \varepsilon Q_1^* + a_4 v Q_1^* \end{cases}, \quad (43)$$

dan

$$\begin{cases} a_2 B_2 I^* = a_2 v E^* \\ a_2 B_2 I^* = \beta_1 S^* I^* + a_4 q_3 I^* \end{cases}. \quad (44)$$

Dari persamaan (41), penyelesaian sistem persamaan (43) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\varepsilon Q_1^* + a_4 v Q_1^* = 0 \quad (45)$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S-S^*)^2}{S} \right) + \beta_1 S^* I^* \left(2 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} \right) \\ & + \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right) + a_2 v E^* \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Penyelesaian sistem persamaan (44) juga dilakukan dengan mengikutsertakan (41), di mana hasilnya adalah sebagai berikut:

$$a_2 v E^* - \beta_1 S^* I^* = 0. \tag{47}$$

Misalkan terdapat $F(u)$, di mana $u = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ dan $F(u)$ memenuhi:

$$a_2 v E^* F(u) - \beta_1 S^* I^* F(u) = 0. \tag{48}$$

Dengan menerapkan $F(u)$ ke persamaan (46), diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) + \beta_1 S^* I^* \left(2 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} - F(u) \right) \\ & + \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right) + a_2 v E^* \left(1 - \frac{y_2}{y_1} + F(u) \right). \end{aligned} \tag{49}$$

$F(u)$ dibentuk supaya nilai koefisien $a_2 v E^*$ adalah nol, sehingga persamaan (49) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) + \beta_1 S^* I^* \left(3 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} - \frac{y_2}{y_1} \right) \\ & + \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right). \end{aligned} \tag{50}$$

$$-\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) \leq 0$$

Dari (50), jelas bahwa $-\mu_1 \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) \leq 0$, karena bentuk kuadrat selalu bernilai positif. Nilai koefisien $\beta_1 S^* I^*$ dan $\beta_2 S^* E^*$ juga bernilai ≤ 0 , karena berdasarkan prinsip ketaksamaan arithmetical and geometrical means diperoleh sebagai berikut:

$$y_0 + \frac{y_1}{y_0 y_2} + \frac{y_2}{y_1} \geq 3 \sqrt{y_0 \frac{y_1}{y_0 y_2} \frac{y_2}{y_1}}$$

$$y_0 + \frac{y_1}{y_0 y_2} + \frac{y_2}{y_1} \geq 3$$

$$3 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} - \frac{y_2}{y_1} \leq 0$$

dan

$$y_0 + \frac{1}{y_0} \geq 2 \sqrt{y_0 \frac{1}{y_0}}$$

$$y_0 + \frac{1}{y_0} \geq 2$$

$$2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \leq 0$$

Dengan demikian terbukti bahwa $\frac{dL}{dt} \leq 0$, di mana $\frac{dL}{dt} = 0$ ketika $y_0 = 1$ dan $y_1 = y_2$.

Karena fungsi Lyapunov dapat dibentuk, maka terbukti bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global ketika $\mathfrak{R}_0 > 1$.

STUDI KASUS

Simulasi numerik dari model penyebaran infeksi COVID-19 untuk menggambarkan pola penyebaran COVID-19, khususnya di Indonesia. Nilai-nilai parameter diperoleh menggunakan metode kuadrat terkecil dengan alat bantu software MAPLE, sedangkan nilai awal dari setiap variabel diperoleh dari data yang disediakan oleh Pemerintah Provinsi Jawa Tengah tanggal 02 April 2021 sampai tanggal 5 Oktober 2021. Nilai parameter disajikan dalam Tabel 2

Tabel 2. Nilai-nilai parameter

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
β_1	$(3.84)(10)^{-8}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
β_2	$(9.13)(10)^{-8}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
ν	0.0473	Per hari	[<i>estimasi</i>]
q_1	0.00983	Per hari	[<i>estimasi</i>]
q_2	$(2.6782)(10)^{-14}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
μ_1	$(0.3873)(10)^{-5}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
μ_2	$(6.15)(10)^{-2}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
A	4.99999	Per hari	[<i>estimasi</i>]
η	$(3.72)(10)^{-1}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
γ	$(9.35)(10)^{-3}$	Per hari	[<i>estimasi</i>]
ε	0.4888	Per hari	[<i>estimasi</i>]

Dengan mensubstitusikan parameter dari Tabel 1 ke dalam persamaan (3.22), diperoleh model dinamik penyebaran penyakit COVID-19 sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (4.999) + 0.4888Q_1 - (3.84(10^{-8}))SI - (9.13(10^{-8}))SE - (0.3873(10^{-5}))S \\ \frac{dE}{dt} &= (3.84(10^{-8}))SI + (9.13(10^{-8}))SE - 0.057133873E \\ \frac{dI}{dt} &= 0.0473E - 0.4335I \\ \frac{dQ_1}{dt} &= 0.00983E - 0.5361Q_1 \\ \frac{dQ_2}{dt} &= (2.6782(10^{-14}))I + 0.0473Q_1 - 0.4335Q_2 \end{aligned} \right. \quad (51)$$

Selanjutnya, substitusikan juga nilai-nilai parameter ke dalam bilangan reproduksi dasar untuk mengetahui jumlah individu rentan yang diinfeksi oleh satu individu terinfeksi dan titik kesetimbangan dari model dengan nilai-nilai parameter yang telah ditentukan.

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta_2 A}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + \nu)} + \frac{\beta_1 A \nu}{\mu_1 (q_1 + \mu_1 + \nu) (q_2 + \eta + \mu_1 + \mu_2)} \approx 2,1577$$

Diperoleh $\mathcal{R}_0 \approx 2,1577 > 1$, hal ini berarti rata-rata satu orang terinfeksi dapat menginfeksi lebih dari satu orang yang rentan, yang secara spesifik berarti rata-rata satu orang dapat menginfeksi sekitar 2 orang yang rentan, yang berarti titik kesetimbangan model adalah titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan endemik dengan nilai-nilai parameter dari Tabel 1 adalah sebagai berikut:

$$K^* = \begin{bmatrix} S^* \\ E^* \\ I^* \\ Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 472907.9230 \\ 65.77405574 \\ 50.55343831 \\ 1.206033011 \\ 0.9269477867 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Kestabilan titik kesetimbangan endemik (52) diselidiki dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai parameter dari Tabel 1 ke dalam fungsi Lyapunov pada (50), disajikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & -(0.3873 \times 10^{-5}) \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) + \beta_1 S^* I^* \left(3 - y_0 - \frac{y_1}{y_0 y_2} - \frac{y_2}{y_1} \right) \\ & + \beta_2 S^* E^* \left(2 - y_0 - \frac{1}{y_0} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

nilai koefisien $\beta_1 S^* I^*$ dan $\beta_2 S^* E^*$ adalah kurang dari sama dengan nol (≤ 0) yang berarti persamaan (53) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dL}{dt} \leq -(0.3873 \times 10^{-5}) \left(\frac{(S - S^*)^2}{S} \right) \leq 0. \quad (54)$$

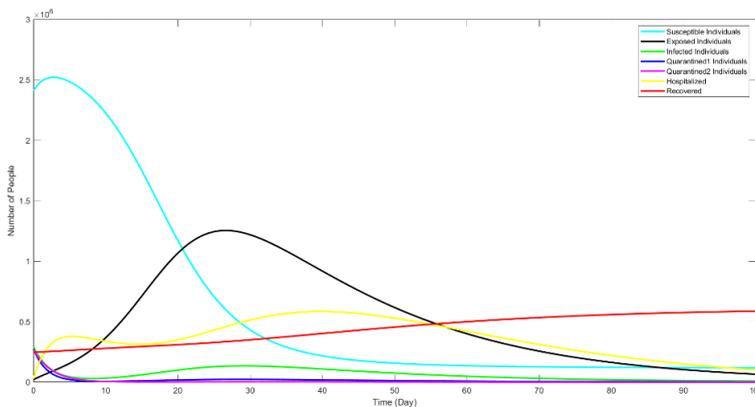
Diperoleh turunan fungsi Lyapunov $\frac{dL}{dt} \leq 0$, yang berarti sistem stabil asimtotik global.

Untuk mengilustrasikan simulasi studi kasus ini, digunakan nilai awal dengan nilai sebagai berikut:

$$S(0) = 2409251; E(0) = 20515; I(0) = 294481;$$

$$Q_1(0) = 273966; Q_2(0) = 267572; H(0) = 26909; R(0) = 249287$$

Simulasi studi kasus berikut model SEIQ₁Q₂HR penyebaran COVID-19 digunakan untuk mengetahui pengaruh terhadap perilaku dinamis jumlah individu *exposed*, individu *infectious*, individu *quarantined-1*, individu *quarantined-2*, dan individu *hospitalized* ditunjukkan dengan menggunakan software MATLAB R2019b.



Gambar 2. Simulasi model endemik $R_0 \geq 0$

Gambar 2 menunjukkan kejadian endemik dimana individu rentan menurun yang disebabkan adanya penularan dari individu *quarantined-1* yang mengakibatkan meningkatnya individu *exposed*, serta penyebaran dari individu *quarantined-2* meningkatkan individu terinfeksi.

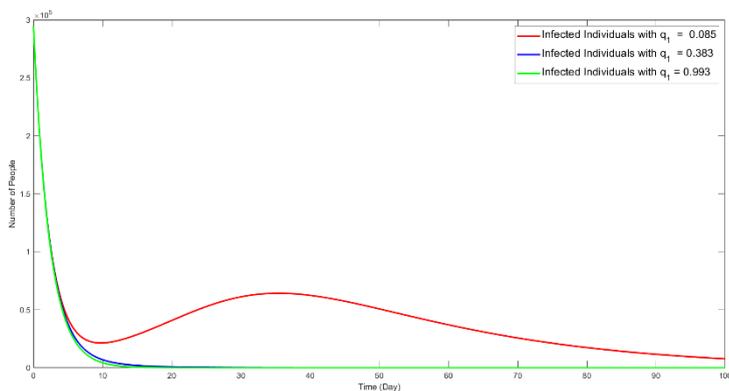
Namun sebelum hari ke- 10 individu *quarantined-1* dan *quarantined-2* menurun, hal ini disebabkan karena individu *quarantined-1* dapat kembali ke individu *exposed* dan individu terinfeksi meningkat. Pada hari ke-27 individu *exposed* menuju titik maksimum dimana jumlahnya mencapai lebih dari 1.25×10^6 dan setelah itu berkurang, tetapi untuk individu terinfeksi

meningkat mencapai puncaknya pada hari ke-29 dengan jumlah sebesar 0.13×10^6 dan setelah itu menurun secara perlahan.

Peningkatan individu terinfeksi yang berasal dari *quarantined-2*, mengakibatkan individu yang ditangani oleh pihak medis (*hospitalized*) meningkat setelah hari ke-40 dimana jumlahnya mencapai 0.584×10^6 , sehingga individu sembuh meningkat.

Selanjutnya, disimulasikan pengaruh variasi parameter q_1 dan q_2 terhadap individu baru yang terinfeksi dan bilangan reproduksi. Hasil simulasi diberikan pada Gambar 3 dan Gambar 4 sebagai berikut.

Pengaruh variasi nilai parameter q_1 dengan parameter lainnya tetap, dengan mengambil $q_1 = 0,085$; $q_1 = 0,383$ dan $q_1 = 0.993$ terhadap perubahan banyaknya individu yang terinfeksi diberikan pada Gambar 3.

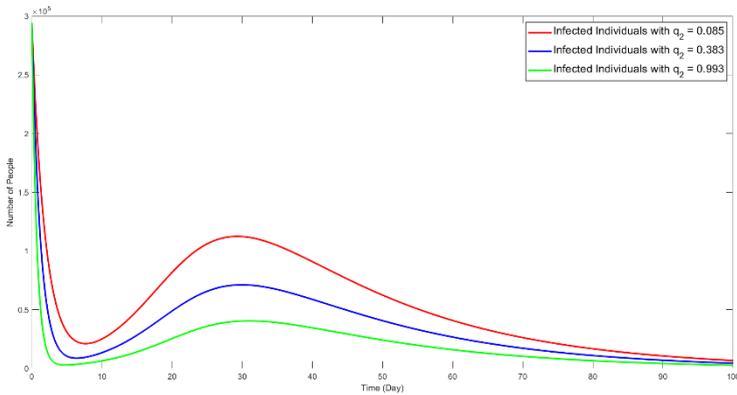


Gambar 3. Pengaruh variasi nilai parameter q_1 terhadap variabel *Infected*

Terlihat bahwa semakin tinggi nilai parameter q_1 maka semakin sedikit individu yang terinfeksi dan sebaliknya. Sampai dengan hari ke 15 dengan $q_1 = 0,085$, banyaknya individu yang terinfeksi

28610x10⁵ orang, untuk $q_1 = 0,383$ yang terinfeksi sebanyak 1928 x10⁵ individu. Sedangkan untuk $q_1 = 0,993$ yang terinfeksi sebanyak 5103 x10⁴ individu.

Pengaruh variasi nilai parameter q_2 dengan parameter lainnya tetap, dengan mengambil $q_2 = 0,085$; $q_2 = 0,383$ dan $q_2 = 0,993$ terhadap perubahan banyaknya individu yang terinfeksi diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pengaruh variasi nilai parameter q_2 terhadap variabel *Infected*

Terlihat bahwa semakin tinggi nilai parameter q_1 maka semakin sedikit individu yang terinfeksi dan sebaliknya. Sampai dengan hari ke 15 dengan $q_2 = 0,085$ banyaknya individu yang terinfeksi 49610 x10⁵ individu, untuk $q_2 = 0,383$ yang terinfeksi sebanyak 28330 x10⁵ individu. Sedangkan untuk $q_2 = 0,993$ yang terinfeksi sebanyak 14160 x10⁵ individu.

SIMPULAN

Telah dikemukakan modifikasi dari model dinamika SEIR dengan menambahkan variabel karantina (Q) dan *hospitalized* (H)

sehingga diperoleh model dinamika SEQ_1Q_2IHR dari penyebaran penyakit COVID-19. Dalam hal ini populasi dibagi menjadi 7 kompartemen, yaitu kelas rentan (S), terpapar (E), karantina yang berasal dari individu terpapar (Q_1), terinfeksi (I), karantina yang berasal dari individu terinfeksi (Q_2), individu yang dirawat di rumah sakit (H), dan sembuh(R). Model dinamik penyebaran COVID-19 tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu non-endemik dan endemik.

Analisis kestabilan titik kesetimbangan non-endemik diselidiki menggunakan metode Routh-Hurwith melalui nilai-nilai eigen dari matrik Jacobian, sedangkan titik kesetimbangan endemik dianalisis dengan menggunakan metode Lyapunov. Telah dibuktikan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (non endemik) stabil asimtotik local, ketika nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu. Titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global, ketika nilai bilangan reproduksi dasar lebih dari satu.

Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa model memiliki titik kesetimbangan endemik. Pada tahap awal jumlah individu-individu terpapar dan terinfeksi COVID-19 meningkat, hal ini terlihat dari nilai bilangan reproduksi dasar sebesar 2,15 yang artinya satu orang yang terinfeksi COVID-19 rata-rata dapat menularkan penyakitnya terhadap 2 orang yang rentan. Dalam rangka memperkecil nilai bilangan reproduksi tersebut, dapat dilakukan dengan meningkatkan laju rata-rata individu terpapar dan terinfeksi menerapkan karantina mandiri. Hal ini mempunyai makna bahwa semakin banyak individu yang melakukan karantina mengakibatkan banyaknya individu yang terinfeksi dapat berkurang secara signifikan. Diperoleh bahwa diantara variasi 2 parameter laju rata-rata individu terpapar dan terinfeksi yang menerapkan karantina mandiri yang lebih berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19 adalah parameter q_1 . Hal ini mengindikasikan bahwa semakin banyak individu yang terpapar melakukan karantina mandiri, maka penyebaran penyakit COVID-19 semakin dapat direduksi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami mengucapkan terimakasih kepada Universitas Diponegoro atas pembiayaan melalui Grand Riset RPI, No. Kontrak: 233-26/UN7.6.1/PP/2021. Studi ini juga difasilitasi melalui Laboratorium HPC (High Performance Computing) FSM, Universitas Diponegoro, Semarang Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- Ala'raj, M., Majdalawieh, M., & Nizamuddin, N., 2021. Modeling and forecasting of COVID-19 using a hybrid dynamic model based on SEIRD with ARIMA corrections. *Infect. Dis. Model.* 6: 98–111.
- Arino, J & Portet, S., 2021. A simple model for COVID-19. *Infect. Dis. Model.* 5: 309–315.
- Bärwolff, G., 2021. Mathematical modeling and simulation of the COVID-19 pandemic. *Systems.* 8(3):1–12.
- Bowong, S., & Tewa, J. J., 2009. Mathematical analysis of a tuberculosis model with differential infectivity. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14 (11):4010-4021.
- Cullenbine, C. et al., 2021. Fizzle Testing: An Equation Utilizing Random Surveillance to Help Reduce COVID-19 Risks. *Math. Comput. Appl.* 26 (1) :16.
- Deng, X. & Kong, Z., 2021. Humanitarian Rescue Scheme Selection Under the COVID-19 Crisis in China: Based on Group Decision-Making Method. *Symmetry*, 13(4).
- Erandi, K. K. W. H., Mahasinghe, A. C., Perera, S. S. N., & Jayasinghe, S., 2020. Effectiveness of the Strategies Implemented in Sri Lanka for Controlling the COVID-19 Outbreak. *Journal of Applied Mathematics.* 2020(2954519).
- Hu,Z., Cui, Q., Han, J., Wang, H., Sha, W.E.I., & Teng,Z., 2020. Evaluation and prediction of the COVID-19 variations at different input population and quarantine strategies, a case study in Guangdong province, China. *International Journal of Infectious Diseases* 95: 231-240.

- Huo, H. F. & Zou, M. X., 2016. Modelling effects of treatment at home on tuberculosis transmission dynamics," *Appl. Math. Model.*, 40(21–22): 9474–9484.
- Li, J., 2011. An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 13(5):2006–2016.
- Liu, X & Yang, L., 2012. Stability analysis of an SEIQV epidemic model with saturated incidence rate. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 13(6); 2671–2679.
- Martínez, V., 2021. A Modified SIRD Model to Study the Evolution of the COVID-19 Pandemic in Spain. *Symmetry*. 13(723).
- Mishra, B.K., Keshri, A. K., Rao Y. S., Mishra, B.K., Mahato, B., Ayesha, S., Rukhaiyyar, B.P., Saini, D.K., & Singh, S.K., 2020. COVID-19 created chaos across the globe: Three novel quarantine epidemic models. *Chaos, Solitons & Fractals*. 138 (109928)
- Ndaïrou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. M. 2020. Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons and Fractals*. 135 (January).
- Radha, M. & Balamuralitharan, S., 2020. A study on COVID-19 transmission dynamics: stability analysis of SEIR model with Hopf bifurcation for effect of time delay. *Adv. Differ. Equations*, 2020(1).
- Rahman, B., Khoshnaw, S. H. A., Agaba, G. O., & Basir F. Al., 2021. How containment can effectively suppress the outbreak of covid-19: A mathematical modeling. *Axioms*. 10(204).
- Schechter, S., 2021 "Geometric Singular Perturbation Theory Analysis of an Epidemic Model with Spontaneous Human Behavioral Change. *J. Math. Biol.* 82(54).
- Serhani, M., and Labbardi, H., 2021. Mathematical modeling of COVID-19 spreading with asymptomatic infected and interacting peoples. *J. Appl. Math. Comput.*, 66(1–2) : 1–20.
- Solís, F., González, L. J. H., & Barbosa, J. J. G. et al, 2021. Convolutional Neural Network–Component Transformation (CNN–CT) for Confirmed COVID-19 Cases. *Math. Comput. Appl.*, 26(2): 29.

- Sugiyanto, S., & Abrori, M., 2020. A Mathematical Model of the Covid-19 Cases in Indonesia (Under and Without Lockdown Enforcement). *Biol. Med. Nat. Prod. Chem.*, 9(1): 15–19.
- Telles, C. R., Lopes, H., & Franco, D., 2021. SARS-CoV-2: Sir Model Limitations and Predictive Constraints. *Symmetry*. 13(4).
- Widowati & Sutimin, 2013 *Pemodelan Matematika, Analisis dan Aplikasinya*. Semarang: Undip Press Semarang.
- Yang, C & Wang, J. 2020. A mathematical model for the novel coronavirus epidemic in Wuhan, China. *Math. Biosci. Eng.*, 17(3): 2708–2724.
- Zewdie, A. D., & Gakkhar, S., 2020. A Mathematical Model for Nipah Virus Infection,” *Journal of Applied Mathematics*. 2020(6050834): 10.