

BAB 3. MODEL MATEMATIKA SEIQR SEBAGAI PENDEKATAN MODEL MATEMATIKA UNTUK PENYEBARAN COVID-19 DENGAN KARANTINA

Muhammad Kharis dan Putri Diyanti

¹Program Studi Matematika, Universitas Negeri Semarang

Email: kharis.mat@mail.unnes.ac.id

DOI: <https://doi.org/10.15294/mtk.v1i1.93>

Abstrak

Pada akhir tahun 2019 muncul virus corona jenis baru yang menyebabkan suatu penyakit menular berbahaya yang disebut Covid-19 (*Corona Virus Disease 2019*). Penyakit tersebut secara cepat menyebar ke berbagai negara di dunia termasuk Indonesia. Berbagai upaya telah dilakukan guna menekan penyebaran virus tersebut salah satunya yang dianggap paling efektif yaitu dengan dilakukan karantina. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyakit Covid-19 dengan karantina menggunakan model SEIQR (*Susceptible-Exposed-Infected-Quarentined-Recovered*).

Berdasarkan analisis model diperoleh diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis yang dilakukan menghasilkan nilai $R_0 = \frac{\beta A \theta [\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)]}{\mu_1 (\theta + \mu_1) [(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \phi) + \phi \gamma]}$.

PENDAHULUAN

Di era globalisasi seperti saat ini, ilmu matematika sangatlah dibutuhkan dalam berbagai aspek. Matematika mempunyai peranan sangat penting dalam kemajuan dunia modern mulai dari teknologi, ilmu pengetahuan alam, ekonomi, kedokteran, akuntansi, rekayasa medis, *artificial intelegent* dan sebagainya. Pada penelitian kali ini penulis akan membahas keterkaitan pemodelan matematika pada suatu penyakit. Pada umumnya penyakit terbagi menjadi dua golongan yaitu penyakit menular dan penyakit tak menular.

Contoh dari penyakit menular yaitu, batuk, flu, tuberkulosis, hepatitis, difteri, campak, tifus dll; Sedangkan contoh penyakit tak menular adalah kanker, diabetes, hipertensi, jantung koroner, dan sebagainya. Umumnya penyakit menular disebabkan oleh mikroorganisme patogen, seperti virus, bakteri dan jamur. Salah satu virus yang menyebabkan penyakit menular yaitu virus corona. Virus corona menyebabkan suatu wabah penyakit *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS) pada tahun 2002-2003 (Gumel et al., 2004). Pada tahun 2012 virus ini kembali menjadi penyebab suatu penyakit baru yang pertama kali di Arab Saudi dan diberi nama *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS) (Beay, 2017).

Pada akhir tahun 2019 dunia kembali dikejutkan dengan temuan suatu penyakit menular berbahaya yang disebabkan oleh virus corona jenis baru. Penyakit tersebut adalah Covid-19 yang memiliki arti kata Co yakni *corona*, Vi yakni *virus* dan D yakni *disease* atau penyakit, kemudian ditambahkan angka 19 yang berarti 2019 mewakili tahun munculnya virus tersebut. Covid-19 yang semula diberi nama Novel Coronavirus (2019-nCoV) atau yang lebih dikenal dengan nama virus corona adalah jenis baru dari *coronavirus* yang menular ke manusia. Virus ini pertama kali ditemukan di kota Wuhan, China pada akhir Desember 2019. Ada dugaan bahwa virus corona awalnya ditularkan dari hewan ke manusia. Namun, kemudian diketahui bahwa virus corona juga menular dari manusia ke manusia.

Secara global kasus infeksi penyakit menular Covid-19 terkonfirmasi hingga 13 Mei 2020 sebanyak 4.170.424 jiwa dengan total kematian sebanyak 287.399 jiwa. Dengan penyebaran di wilayah Africa sebanyak 49.429 terinfeksi dengan total kematian 1.500, America sebanyak 1.781.564 terinfeksi dengan total kematian 106.504, Eastern Mediterranean sebanyak 284.270 terinfeksi dengan total kematian 9.259, Europe sebanyak 1.780.316 terinfeksi dengan total kematian 159.799, South-East Asia sebanyak 110.932 terinfeksi dengan total kematian 3.746, dan Western Pacific sebanyak 163.201 dengan total kematian 6.578 (WHO,

2020). Dengan semakin maraknya penyebaran penyakit Covid-19 ke berbagai belahan dunia maka WHO menetapkan penyakit tersebut sebagai pandemi pada 12 Maret 2020 (Nuraini, Khairudin, & Apri, 2020).

Dalam menghadapi begitu banyak hal yang tidak diketahui, beberapa ahli matematika biologi telah menantang model yang saat ini digunakan untuk menggambarkan mekanisme yang mungkin untuk kelangsungan hidup dan penyebaran penyakit (Nishiura et al., 2004). Di antaranya Beay (2017) telah memodelkan suatu penyakit yang disebabkan oleh *coronavirus* yaitu MERS dengan menggunakan model matematika *SIQR*. Pada model *SIQR*, populasi dibagi menjadi empat kelas yaitu *susceptible* (*S*), *infected* (*I*), *quarantined* (*Q*), dan *Recovered* (*R*). Dalam model ini diasumsikan bahwa total populasi (*N*) adalah konstan, dengan $N = S + I + Q + R$. Penyebaran penyakit Covid-19 juga telah dimodelkan oleh Annas et al., (2020) dengan model SEIR. Kemudian Liu et al., (2020) juga telah memodelkan penyebaran penyakit Covid-19 dengan metode SIRU. Dalam penelitian tersebut mengangkat kasus penyebaran Covid-19 di kota Wuhan di mana virus tersebut muncul pertama kali. Model tersebut terbagi menjadi empat variable yaitu *Susceptible* (*S*), *Infected* (*I*), *Reported* (*R*), *Unreported* (*U*). Selain dengan metode persamaan differensial Covid-19 juga telah dimodelkan oleh beberapa ahli statistik di antaranya Sifriyani & Mulawarman (2020) menggunakan model SIR, Nuraini et al., (2020) dan Chatterje et al., (2020) menggunakan simulasi stokastik

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis akan memodelkan penyebaran penyakit Covid-19 dengan memodifikasi model SEIR di mana populasi dibagi menjadi empat kelas yaitu *susceptible* (*S*), *Exposed* (*E*), *infected* (*I*), dan *recovered* (*R*). Kemudian dari model tersebut ditambahkan kelas karantina. Hal tersebut melihat pertimbangan karena karantina dapat membantu dalam memutus rantai penyebaran penyakit menular. Pemerintah Indonesia juga telah menerapkan karantina sebagai salah satu usaha untuk memutus rantai penyebaran penyakit Covid-19 disertai juga

dengan kebijakan pembatasan kegiatan masyarakat atau biasa disebut dengan istilah *physical distancing*.

MODEL SEIQR (SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-QUARENTINED-RECOVERED)

Pada model penyebaran Covid-19 yang akan dibahas, populasi manusia diklasifikasikan menjadi lima kelas yang terdiri dari kelas *susceptible* meliputi jumlah individu yang rentan dinotasikan dengan S , kelas *exposed* meliputi jumlah individu yang tertular virus tetapi belum menunjukkan gejala klinis dan berada dalam pengawasan yang dinotasikan dengan E , kelas *infected* meliputi individu yang terinfeksi ditambah dengan PDP (Pasien Dalam Pengawasan) dinotasikan dengan I , kelas *quarantined* meliputi individu yang dikarantina dinotasikan dengan Q , dan kelas *recovered* meliputi individu yang telah sembuh atau bebas penyakit dinotasikan dengan R . Asumsi-asumsi yang digunakan dalam membentuk model antara lain: jumlah populasi diasumsikan cukup besar, Penularan Covid-19 individu yang dikarantina ke individu rentang diasumsikan sangat kecil sehingga dalam model ini diabaikan, semua individu pada kelas *infected* dan *exposed* dikarantina, dan fokus utama pada model ini adalah tindakan karantina.

Dalam pembentukan model matematika yang dibentuk, terdapat variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model, variabel-variabel dan parameter-parameter dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Daftar Variabel –variabel dalam Model

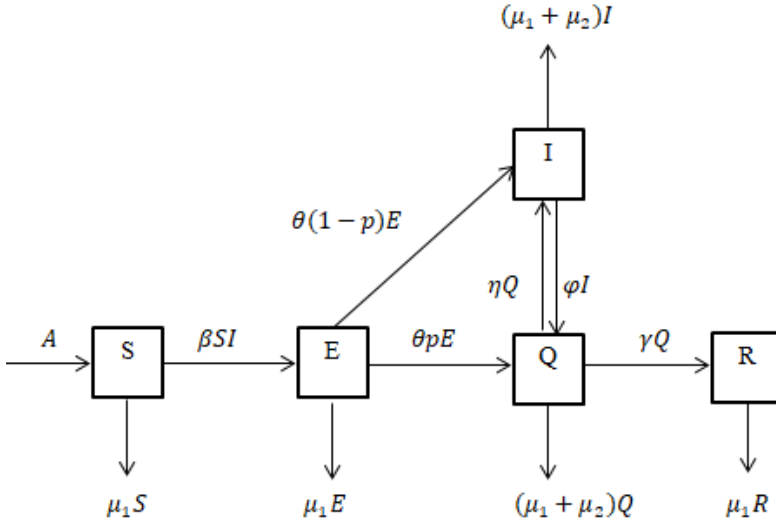
Variabel Keterangan		Syarat
$N(t)$	Ukuran populasi pada waktu t	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Banyak individu yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu t	$S(t) \geq 0$
$E(t)$	Banyak individu yang tertular virus tetapi	$E(t) \geq 0$

	belum menunjukkan gejala klinis dan berada dalam pengawasan pada waktu t	
$I(t)$	Banyak individu PDP ditambah dengan banyak individu terinfeksi pada waktu t	$I(t) \geq 0$
$Q(t)$	Banyak inidividu di karantina pada waktu t	$Q(t) \geq 0$
$R(t)$	Banyak individu yang telah sembuh atau bebas dari penyakit pada waktu t	$R(t) \geq 0$

Tabel 2. Daftar Parameter-parameter dalam Model

Parameter	Keterangan
A	Laju <i>recruitment</i> (dalam ribuan)
β	Peluang individu rentan tertular penyakit dan menjadi individu <i>exposed</i>
θ	Laju individu <i>exposed</i> menjadi terinfeksi
μ_1	Laju kematian alami
μ_2	Laju kematian akibat Covid 19
p	Proporsi individu <i>exposed</i> di karantina
η	Laju individu di karantina menjadi individu terinfeksi
φ	Laju individu terinfeksi di karantina
γ	Laju individu sembuh atau bebas penyakit

Diagram transfer dari model matematika proses penyebaran Covid-19 dengan pengaruh karantina dalam suatu populasi dapat disajikan dengan diagram transfer seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Covid-19

Dari Gambar 1 diperoleh Sistem (1) berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= A - \beta SI - \mu_1 S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\theta + \mu_1)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \theta(1-p)E + \eta Q - (\mu_1 + \mu_2 + \phi)I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \theta pE + \phi I - (\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)Q \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma Q - \mu_1 R \\
 N(T) &= S(T) + E(T) + I(T) + Q(T) + R(T)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Penentuan titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh dengan membuat nol ruas kanan Sistem (1), diperoleh Sistem (2).

$$\begin{aligned}
 A - \beta SI - \mu_1 S &= 0 \\
 \beta SI - (\theta + \mu_1)E &= 0 \\
 \theta(1-p)E + \eta Q - (\mu_1 + \mu_2 + \phi)I &= 0 \\
 \theta pE + \phi I - (\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)Q &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\gamma Q - \mu_1 R = 0$$

$$N(T) = S(T) + E(T) + I(T) + Q(T) + R(T)$$

Didefinisikan $X = \mu_1 + \mu_2 + \varphi$ dan $Y = \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma$.

Dari persamaan pertama dari Sistem (2) diperoleh

$$S = \frac{A}{\beta I + \mu_1} \quad (3)$$

Dari Persamaan ketiga dari Sistem (2), diperoleh

$$Q = \frac{XI}{\eta} - \frac{\theta(1-\rho)E}{\eta} \quad (4)$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan keempat pada Sistem (2), diperoleh

$$E = I \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho)} \right) \quad (5)$$

Substitusi (5) ke persamaan kedua Sistem (2), diperoleh

$$\begin{aligned} \beta SI - (\theta + \mu_1)E &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI - (\theta + \mu_1)I \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho)} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow I \left(\beta S - (\theta + \mu_1) \left(\frac{-\varphi\eta + XY}{\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho)} \right) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow I = 0 \vee S = \frac{(\theta + \mu_1)}{\beta} \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho)} \right) & \quad (6) \end{aligned}$$

Untuk $I = 0$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$P_0 = (S, E, I, Q, R) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Untuk $I \neq 0$:

Dari persamaan (6) diperoleh

$$S = \frac{(\theta + \mu_1)}{\beta} \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho)} \right) \quad (7)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan pertama dari Sistem (2) diperoleh

$$I = \frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1-\rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta Y)} - \frac{\mu_1}{\beta} \quad (8)$$

Substitusikan persamaan (7) dan (8) ke persamaan kedua Sistem (2), diperoleh

$$E = \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho)} \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \quad (9)$$

Subtitusikan persamaan (8) dan (9) ke persamaan keempat Sistem (2), diperoleh

$$Q = \frac{1}{Y} \left(\rho \frac{XY - \varphi\eta}{\rho\eta + Y(1 - \rho)} + \varphi \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \quad (10)$$

Subtitusikan persamaan (10) ke persamaan kelima Sistem (2), diperoleh

$$R = \frac{\gamma}{Y\mu_1 Y} \left(\rho \frac{XY - \varphi\eta}{\rho\eta + Y(1 - \rho)} + \varphi \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \quad (11)$$

Dari proses di atas, saat $I \neq 0$ diperoleh titik kesetimbangan tak bebas penyakit $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\theta + \mu_1}{\beta} \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho)} \right) \\ E^* &= \left(\frac{XY - \varphi\eta}{\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho)} \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \\ I^* &= \frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \\ Q^* &= \frac{1}{Y} \left(\rho \frac{XY - \varphi\eta}{\rho\eta + Y(1 - \rho)} + \varphi \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \\ R^* &= \frac{\gamma}{\mu_1 Y} \left(\rho \frac{XY - \varphi\eta}{\rho\eta + Y(1 - \rho)} + \varphi \right) \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta Y(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

di mana $X = \mu_1 + \mu_2 + \varphi$ dan $Y = \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma$.

$$\begin{aligned} \text{Jelas } XY - \varphi\eta &= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) - \varphi\eta \\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\eta + \gamma) - \varphi\eta \\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\gamma + (\mu_1 + \mu_2 \\ &\quad + \varphi)\eta - \varphi\eta \\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\gamma + (\mu_1 + \mu_2)\eta \\ &\quad + \varphi\eta - \varphi\eta \\ &= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\gamma + (\mu_1 + \mu_2)\eta \\ &= (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$S^* = \frac{\theta + \mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma}{\theta\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)} \right)$$

$$\begin{aligned}
E^* &= \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma}{\theta\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)} \right) \\
&\quad \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \\
I^* &= \frac{A(\theta\rho\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)} - \frac{\mu_1}{\beta} \\
Q^* &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma} \left(\frac{\rho((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)} + \varphi \right) \\
&\quad \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta\gamma(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right) \\
R^* &= \frac{\gamma}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)} \left(\frac{\rho((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)} + \varphi \right) \\
&\quad \left(\frac{A(\theta\rho\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)(1 - \rho))}{(\theta + \mu_1)((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)} - \frac{\mu_1}{\beta} \right)
\end{aligned}$$

Penentuan angka reproduksi dasar (basic reproduction number)

Persyaratan agar titik kesetimbangan tak bebas penyakit ada adalah $I^* > 0$. Angka reproduksi dasar ditentukan dengan melihat syarat pembuat nilai $I^* > 0$. Dari proses di atas didapat bahwa $I^* > 0$ apabila

$$\begin{aligned}
&\frac{A(\theta p\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)(1 - p))}{(\theta + \mu_1)((\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma)} - \frac{\mu_1}{\beta} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta A\theta[\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]} > 1
\end{aligned}$$

Jadi angka reproduksi dasar dapat didefinisikan dengan

$$R_0 = \frac{\beta A\theta[\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}$$

Jadi $I^* > 0$ jika $R_0 > 1$.

Berdasarkan nilai R_0 tersebut diperoleh nilai-nilai E^* , I^* , Q^* , dan R^* yang dinyatakan dalam R_0 sebagai berikut.

$$E^* = \frac{\mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma}{\theta\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} \right) (R_0 - 1)$$

$$I^* = \frac{\mu_1}{\beta} (R_0 - 1)$$

$$Q^* = \frac{\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

$$R^* = \frac{\gamma}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

Hasil dari proses di atas dapat dituliskan dalam sebuah teorema yaitu teorema eksistensi titik kesetimbangan Sistem (1) yang diberikan pada Teorema 1 berikut.

Teorema 1.

Diberikan $R_0 = \frac{\beta A \theta [\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1 (\theta + \mu_1) [(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}$.

1. Jika $R_0 \leq 1$ maka Sistem (1) hanya mempunyai satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dengan

$$P_0 = S, E, I, Q, R = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

2. Jika $R_0 > 1$ maka Sistem (1) mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (S, E, I, Q, R) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right)$ dan titik kesetimbangan tak bebas penyakit $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ dengan

$$S^* = \frac{\theta + \mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma}{\theta\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} \right)$$

$$E^* = \frac{\mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma}{\theta\eta + \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} \right) (R_0 - 1)$$

$$I^* = \frac{\mu_1}{\beta} (R_0 - 1)$$

$$Q^* = \frac{\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

$$R^* = \frac{\gamma}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]}{\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

Analisa kestabilan titik kesetimbangan

Kestabilan kedua titik kesetimbangan dianalisa dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian Sistem (1) sebagai berikut.

$$J^*(P) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu_1 & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta I & -(\theta + \mu_1) & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & \theta(1-p) & -(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) & \eta & 0 \\ 0 & \theta p & \varphi & -(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

B.3.a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0)

Matriks Jacobian pada titik bebas penyakit sebagai berikut

$$J^*(P_0) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & -\beta \frac{A}{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & -(\theta + \mu_1) & \beta \frac{A}{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \theta(1-p) & -(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) & \eta & 0 \\ 0 & \theta p & \varphi & -(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian $J^*(P_0)$ sebagai berikut.

$$(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1) \left[(\lambda + \theta + \mu_1)(\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) - \beta \eta \theta p \frac{A}{\mu_1} - \varphi \eta (\lambda + \theta + \mu_1) + \beta \frac{A}{\mu_1} (\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma)(-\theta(1-p)) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1) & \left[\lambda^3 + (X + Y + \theta + \mu_1)\lambda^2 \right. \\ & + \left((\theta + \mu_1)(X + Y) + XY - \varphi\eta \right. \\ & \left. \left. - \beta \frac{A}{\mu_1} \theta(1 - \rho) \right) \lambda \right. \\ & + \left((\theta + \mu_1)XY - \beta\eta\theta\rho \frac{A}{\mu_1} - \varphi\eta(\theta + \mu_1) \right. \\ & \left. \left. - Y\beta \frac{A}{\mu_1} \theta(1 - \rho) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

dengan $X = \mu_1 + \mu_2 + \varphi$ dan $Y = \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma$.

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta A \theta [\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]} \\ &= \frac{\beta A \theta (\rho\eta + Y(1 - \rho))}{\mu_1(\theta + \mu_1)(-\varphi\eta + XY)} \end{aligned}$$

Diperoleh dua nilai eigen dari persamaan $\lambda + \mu_1 = 0$ yaitu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu_1$$

Akan ditentukan nilai eigen persamaan berikut

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + (X + Y + \theta + \mu_1)\lambda^2 + \left((\theta + \mu_1)(X + Y) + XY - \varphi\eta - \right. \\ & \left. \beta \frac{A}{\mu_1} \theta(1 - \rho) \right) \lambda + \left((\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta) - \frac{\beta\theta A}{\mu_1} (\eta\rho + Y(1 - \rho)) \right) = \\ & 0 \end{aligned}$$

Digunakan kriteria Routh Hurwitz dalam penentuan nilai eigen persamaan di atas yaitu dengan menunjukkan

$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, dan

$a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$ di mana

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = X + Y + \theta + \mu_1,$$

$$a_2 = (\theta + \mu_1)(X + Y) + XY - \varphi\eta - \beta \frac{A}{\mu_1} \theta(1 - \rho),$$

$$a_3 = (\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta) - \frac{\beta A \theta}{\mu_1} (\eta\rho + Y(1 - \rho)).$$

Jelas $a_1 = 3\mu_1 + 2\mu_2 + \varphi + \eta + \gamma + \theta > 0$ dan

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta A \theta [\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma]} \\ &= \frac{\beta A \theta (\rho\eta + Y(1 - \rho))}{\mu_1(\theta + \mu_1)(-\varphi\eta + XY)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jelas } a_2 &= (\theta + \mu_1)(X + Y) + XY - \varphi\eta - \beta \frac{A}{\mu_1} \theta(1 - \rho) \\ &= (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) - \varphi\eta - \frac{\beta A \theta(1 - \rho)}{\mu_1} \\ &= \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left[(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \varphi) + \varphi\gamma] - \frac{\beta A \theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)}{\mu_1} \right] \\ &= \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left[(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (\theta + \mu_1)\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \varphi) + \varphi\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \frac{\beta A \theta}{\mu_1} \eta + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2) + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\varphi + \eta) + (\theta + \mu_1)\varphi\gamma - \frac{\beta A \theta[\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)]}{\mu_1} \right] \\ &= \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left[(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (\theta + \mu_1)\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \varphi) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \frac{A\beta\theta}{\mu_1}\eta + [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2) + \\
& (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\varphi + \eta) + (\theta + \mu_1)\varphi\gamma](1 - R_0)] \\
\text{Jelas } a_3 &= (\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta) - \frac{\beta A\theta}{\mu_1}(\eta\rho + Y(1 - \rho)) \\
&= (\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta) \left[1 - \frac{\beta A\theta(\eta\rho + Y(1 - \rho))}{\mu_1(\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)} \right] \\
&= (\theta + \mu_1)(XY - \varphi\eta)(1 - R_0) \\
&= (\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma](1 - R_0) \\
\text{Jelas } a_2 &> 0 \text{ dan } a_3 > 0 \text{ apabila } R_0 < 1.
\end{aligned}$$

Ditunjukkan $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$.

Jelas

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 - a_3 &= (X + Y + \theta + \mu_1) \cdot \frac{1}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left[(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2) \right. \\
& \quad \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (\theta + \mu_1)\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + \\
& \quad (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \varphi) + \\
& \quad \varphi\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \frac{A\beta\theta}{\mu_1}\eta + [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2) \\
& \quad \mu_2) + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\varphi + \eta) + (\theta + \mu_1)\varphi\gamma](1 - R_0) \Big] \\
& \quad - (\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma + \eta) + \varphi\gamma](1 - R_0) \\
&= \frac{3\mu_1 + 2\mu_2 + \varphi + \eta + \gamma + \theta}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left[(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \right. \\
& \quad (\theta + \mu_1)\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma) + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(\mu_1 + \mu_2) \\
& \quad \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \eta + \gamma + \varphi) + \varphi\gamma(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \frac{A\beta\theta}{\mu_1}\eta \Big] + \\
& \quad [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\varphi + \eta) \\
& \quad + (\theta + \mu_1)\varphi\gamma] \left(\frac{2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \eta + \theta}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \right) (1 - R_0)
\end{aligned}$$

Jadi nilai $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$ positif apabila $R_0 < 1$.

Jadi λ_1, λ_2 negatif dan bagian real $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ bernilai negatif. Dari analisa kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 diperoleh Teorema 2 berikut.

Teorema 2.

Titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$.

B.3.b. Kestabilan titik kesetimbangan tak bebas penyakit (P_1)

Diasumsikan $\eta = 0$ dalam analisis kesetimbangan titik ini.

Titik kesetimbangan P_1 dengan $\eta = 0$ adalah

$P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ di mana

$$S^* = \frac{\theta + \mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{\theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)} \right)$$

$$E^* = \frac{\mu_1}{\beta} \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{\theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)} \right) (R_0 - 1)$$

$$I^* = \frac{\mu_1}{\beta} (R_0 - 1)$$

$$Q^* = \frac{\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma]}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

$$R^* = \frac{\gamma}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \left(\frac{p[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma]}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)} + \varphi \right) (R_0 - 1)$$

dan

$$R_0 = \frac{\beta A \theta [(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)]}{\mu_1 (\theta + \mu_1) [(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma]}.$$

Matriks Jacobian untuk P_1 dengan $\eta = 0$ sebagai berikut.

$$J^*(P_1) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu_1 & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & -(\theta + \mu_1) & \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & \theta(1-p) & -X & 0 & 0 \\ 0 & \theta p & \varphi & -Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Penentuan persamaan karakteristik dari matriks $J^*(P_1)$:

$$\text{Det}(\lambda I - J^*(P_1)) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu_1 & 0 & \beta S^* & 0 & 0 \\ -\beta I^* & \lambda + \theta + \mu_1 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & -\theta(1 - \rho) & \lambda + X & 0 & 0 \\ 0 & -\theta\rho & -\varphi & \lambda + Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & \lambda + \mu_1 \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu_1 & 0 & \beta S^* & 0 & 0 \\ -\beta I^* & \lambda + \theta + \mu_1 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & -\theta(1 - \rho) & \lambda + X & 0 & 0 \\ 0 & -\theta\rho & -\varphi & \lambda + Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & \lambda + \mu_1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_1) \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu_1 & 0 & \beta S^* & 0 \\ -\beta I^* & \lambda + \theta + \mu_1 & -\beta S^* & 0 \\ 0 & -\theta(1 - \rho) & \lambda + X & 0 \\ 0 & -\theta\rho & -\varphi & \lambda + Y \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_1)(\lambda + Y) \begin{vmatrix} \lambda + \beta I^* + \mu_1 & 0 & \beta S^* \\ -\beta I^* & \lambda + \theta + \mu_1 & -\beta S^* \\ 0 & -\theta(1 - \rho) & \lambda + X \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_1)(\lambda + Y) [(\lambda + \beta I^* + \mu_1)(\lambda + \theta + \mu_1)(\lambda + X) + \\
&\quad \beta S^*(-\beta I^*)(-\theta(1 - \rho)) - (-\theta(1 - \rho))(-\beta S^*)(\lambda + \beta I^* + \\
&\quad \mu_1)] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu_1)(\lambda + Y) [\lambda^3 + \lambda^2(\beta I^* + \mu_1 + \theta + \mu_1 + X) + \\
&\quad \lambda[(\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1 + X) + X(\theta + \mu_1) - \beta S^*\theta(1 - \rho)] + \\
&\quad (\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1)X - \beta S^*\theta\mu_1(1 - \rho)] = 0
\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu_1)(\lambda + Y) [\lambda^3 + \lambda^2(\beta I^* + \mu_1 + \theta + \mu_1 + X) \\
&\quad + \lambda[(\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1 + X) + X(\theta + \mu_1) \\
&\quad - \beta S^*\theta(1 - \rho)] + (\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1)X \\
&\quad - \beta S^*\theta\mu_1(1 - \rho)] = 0.
\end{aligned}$$

dengan $X = \mu_1 + \mu_2 + \varphi$ dan $Y = \mu_1 + \mu_2 + \gamma$.

Diperoleh dua nilai eigen dari matriks tersebut adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu_1 \\ \lambda_2 &= -Y = -(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)\end{aligned}$$

Akan ditentukan nilai eigen persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned}\lambda^3 + \lambda^2(\beta I^* + \mu_1 + \theta + \mu_1 + X) \\ + \lambda[(\theta + \mu_1)X + (X + \theta + \mu_1)\beta I^* \\ - \theta(1 - \rho)\beta S^*] + (\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1)X \\ - \beta S^*\theta\mu_1(1 - \rho) = 0\end{aligned}$$

Digunakan kriteria Routh Hurwitz dalam penentuan nilai eigen persamaan di atas yaitu dengan menunjukkan $\mathbf{a}_1 > \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 > \mathbf{0}, \mathbf{a}_3 > \mathbf{0}$, dan $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 > \mathbf{0}$ di mana

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = X + \theta + \mu_1 + \beta I^*$$

$$a_2 = (\theta + \mu_1)X + (X + \theta + \mu_1)\beta I^* - \theta(1 - \rho)\beta S^*$$

$$a_3 = (\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1)X - \beta S^*\theta\mu_1(1 - \rho)$$

$$\text{Jelas } a_1 = X + \theta + \mu_1 + \beta I^* = 2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta + \mu_1(R_0 - 1).$$

Jadi $a_1 > 0$ apabila $R_0 > 1$.

Ditunjukkan $a_2 > 0$.

$$\begin{aligned}a_2 &= (\theta + \mu_1)X + (X + \theta + \mu_1)\beta I^* - \theta(1 - \rho)\beta S^* \\ &= (\theta + \mu_1)X + (X + \theta + \mu_1)\mu_1(R_0 - 1) \\ &\quad - \theta(1 - \rho)(\theta \\ &\quad + \mu_1) \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{\theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - p)} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) + (2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1) \\
&\quad - (\theta + \mu_1) \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - (\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma]] \\
&= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \varphi(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)\varphi - (\theta + \mu_1)\varphi\gamma] \\
&= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \varphi(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + (2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - \varphi(\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)] \\
&= (2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1).
\end{aligned}$$

Jadi $a_2 > 0$ apabila $R_0 > 1$.

Ditunjukkan $a_3 > 0$.

$$\begin{aligned}
a_3 &= (\beta I^* + \mu_1)(\theta + \mu_1)X - \beta S^* \theta \mu_1(1 - \rho) \\
&= (\theta + \mu_1)X\beta I^* + (\theta + \mu_1)X\mu_1 - \mu_1\theta(1 - \rho)\beta S^* \\
&= (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\mu_1(R_0 - 1) + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\mu_1 \\
&\quad - \mu_1\theta(1 - \rho)(\theta + \mu_1) \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{\theta(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1 - \rho)} \right) \\
&= (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\mu_1(R_0 - 1) + (\theta + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)\mu_1 \\
&\quad - \mu_1(\theta + \mu_1) \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \right) \\
&= \mu_1(\theta + \mu_1) \left[(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(R_0 - 1) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi) - \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) + \varphi\gamma}{(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_1(\theta + \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(R_0 - 1) \\
&\quad + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) \\
&\quad - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \gamma) - \varphi\gamma] \\
&= \frac{\mu_1(\theta + \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(R_0 - 1) \\
&\quad + (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) + \varphi(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) \\
&\quad - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma) - \varphi\varphi(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)] \\
&= \frac{\mu_1(\theta + \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2 + \gamma} [(\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(R_0 - 1)] \\
&= (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\theta + \mu_1)\mu_1(R_0 - 1).
\end{aligned}$$

Jadi $a_3 > 0$ apabila $R_0 > 1$.

Ditunjukkan $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$.

Jelas $a_1 \cdot a_2 - a_3$

$$\begin{aligned}
&= [2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta + \mu_1(R_0 - 1)](2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)\mu_1(R_0 - 1) \\
&\quad - (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\theta + \mu_1)\mu_1(R_0 - 1) \\
&= \mu_1(R_0 - 1)[(2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta)(2\mu_1 + \mu_2 + \varphi + \theta \\
&\quad + \mu_1(R_0 - 1)) - (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\theta + \mu_1)] \\
&= \mu_1(R_0 - 1)[[(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) + (\theta + \mu_1)][(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) \\
&\quad + (\theta + \mu_1) + \mu_1(R_0 - 1)] \\
&\quad - (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)(\theta + \mu_1)] \\
&= \mu_1(R_0 - 1)[(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) + (\theta + \mu_1) \\
&\quad + \mu_1(R_0 - 1)] \\
&\quad + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi)[(\mu_1 + \mu_2 + \varphi) + \mu_1(R_0 - 1)]].
\end{aligned}$$

Jadi $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$ apabila $R_0 > 1$.

Jadi λ_1, λ_2 negatif dan bagian real $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ bernilai negatif. Dari analisa kestabilan titik kesetimbangan tak bebas penyakit P_1 diperoleh Teorema 3 berikut.

Teorema 3.

Titik kesetimbangan tak bebas penyakit P_1 stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$ dan $\eta = 0$.

Simulasi

Untuk mengamati penyebaran populasi penderita Covid-19 dengan pengaruh Karantina di Indonesia maka diperlukan simulasi numerik dari Sistem (1). Nilai parameter diberikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai Parameter dalam model

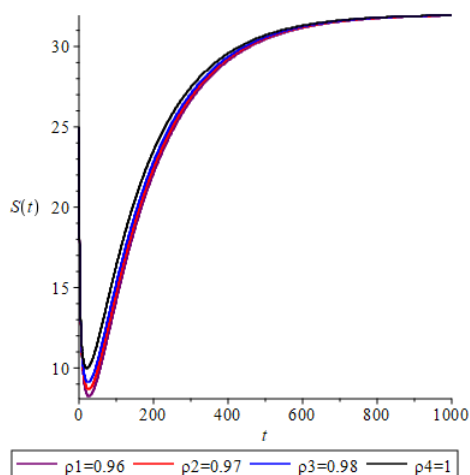
Parameter	Nilai	Sumber
A	2×10^{-2}	Asumsi
β	1.0538×10^{-1}	(He, Peng, & Sun, 2020)
θ	$5,84 \times 10^{-2}$	(KEMENKES RI, 2020)
μ_1	$6,25 \times 10^{-3}$	(Annas et al., 2020)
μ_2	$3,36 \times 10^{-2}$	(KEMENKES RI, 2020)
p	$0 < p < 1$	
η	$5,84 \times 10^{-2}$	(KEMENKES RI, 2020)
φ	$29,10 \times 10^{-2}$	(He et al., 2020)
γ	$83,82 \times 10^{-2}$	(KEMENKES RI, 2020)

Untuk mengetahui besar pengaruh karantina individu yang terduga terinfeksi terhadap pencegahan penyebaran penyakit Covid-19, dibuat perbedaan pada proporsi individu yang terduga terinfeksi di karantina yang dinyatakan dengan parameter p . Dengan menggunakan nilai $R_0 = 1$ diperoleh batas p dengan sebesar 0.95. Titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (S, E, I, Q, R) = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0\right)$. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3 diperoleh $\frac{A}{\mu_1} = 3,2$.

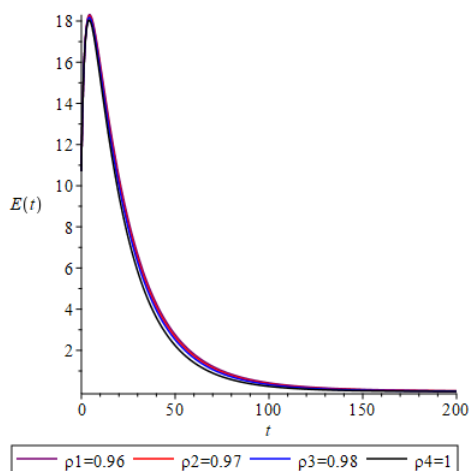
Tabel 4. Variasi nilai p untuk $R_0 < 1$

p	R_0
0,96	0,97
0,97	0,88
0,98	0,79
1	0,60

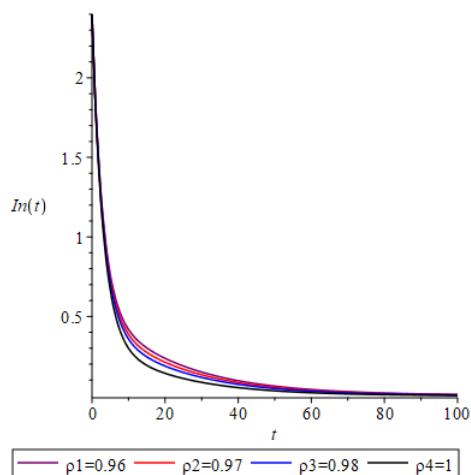
Dari Tabel 4 dengan nilai-nilai parameter lain tetap seperti pada Tabel 3, terlihat bahwa p dinaikkan 0,01 mengakibatkan nilai R_0 turun sekitar 0,09. Bisa dikatakan perubahan peningkatan proporsi individu yang dikarantina berperan aktif dalam menurunkan penyebaran Covid-19 ini. Selanjutnya dibuat simulasi dengan variasi p pada Tabel 4 dan diperoleh Gambar 2 sampai dengan Gambar 6.



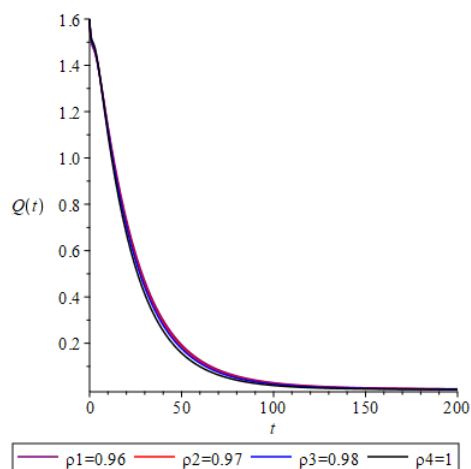
Gambar 2. Grafik S dengan variasi nilai p



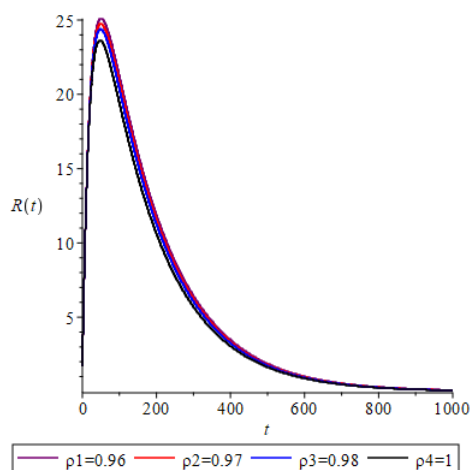
Gambar 3. Grafik E dengan variasi nilai p



Gambar 4. Grafik I dengan variasi nilai p



Gambar 5. Grafik Q dengan variasi nilai p



Gambar 6. Grafik R dengan variasi nilai p

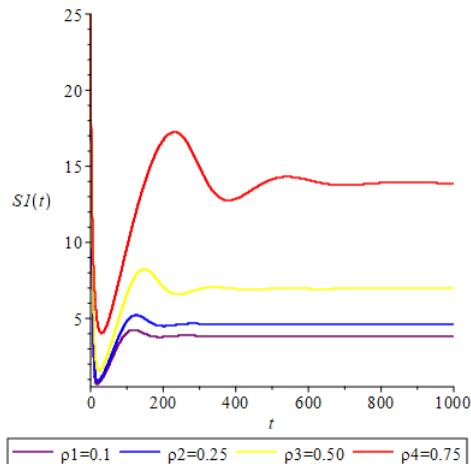
Dari Gambar 2 sampai Gambar 6 terlihat bahwa semua grafik menuju nilai-nilai yang berkenaan dengan titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0 = (S, E, I, Q, R) = \left(\frac{32}{10}, 0, 0, 0, 0\right)$ seperti grafik S menuju garis $S = \frac{32}{10}$, grafik E menuju garis $E = 0$, grafik I menuju garis $I = 0$, grafik Q menuju garis $Q = 0$, dan grafik R menuju garis $R = 0$. Semua grafik konvergen secara monoton ke masing-masing garis sesuai dengan nilai-nilai variabel yang berkenaan untuk nilai $t \rightarrow \infty$. Dapat dikatakan hasil dari simulasi mempunyai simpulan yang sama dengan hasil analisis.

Selanjutnya dilakukan variasi parameter untuk nilai $R_0 > 1$ dan $\eta = 0$ seperti pada Tabel 5.

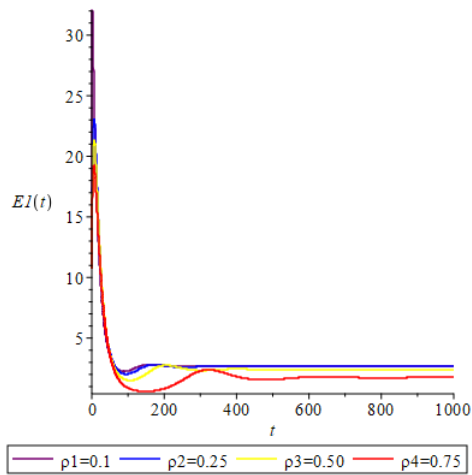
Tabel 5. Variasi nilai p dan $\eta = 0$ untuk $R_0 > 1$

ρ	R_0	S^*	E^*	I^*	Q^*	R^*
0.10	8.82	3.86	2.72	0.43	0.16	21.63
0.25	7.45	4.63	2.64	0.35	0.16	21.46
0.50	5.17	6.95	2.42	0.21	0.15	20.29
0.75	2.89	13.90	1.74	0.07	0.11	15.13

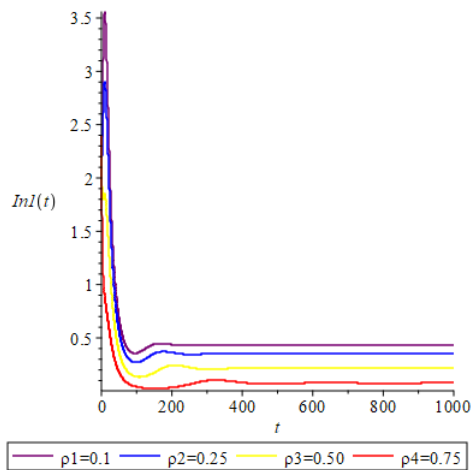
Dari Tabel 5 dengan nilai-nilai parameter lain tetap seperti pada Tabel 3, terlihat bahwa perubahan nilai R_0 sekitar 9 kali perubahan nilai P artinya perubahan kecil pada nilai P memberikan efek yang lumayan besar dalam perubahan nilai R_0 . Bisa dikatakan perubahan peningkatan proporsi individu yang dikarantina berperan aktif dalam menurunkan penyebaran Covid-19 ini. Selanjutnya dibuat simulasi dengan variasi p pada Tabel 5 dan $\eta = 0$, diperoleh Gambar 7 sampai dengan Gambar 11.



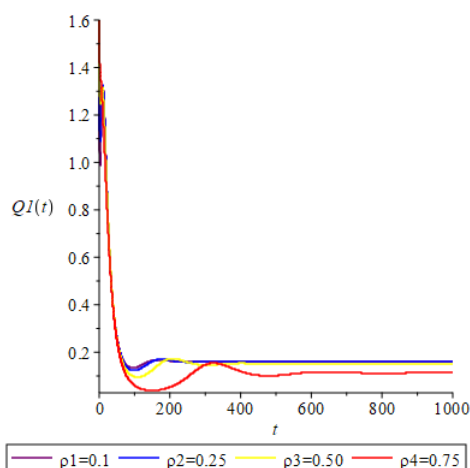
Gambar 7. Grafik S dengan variasi nilai p dan $\eta = 0$



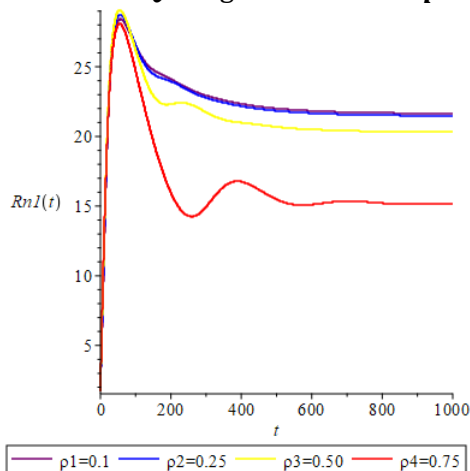
Gambar 8. Grafik E dengan variasi nilai p dan $\eta = 0$



Gambar 9. Grafik I dengan variasi nilai p dan $\eta = 0$



Gambar 10. Grafik Q dengan variasi nilai p dan $\eta = 0$



Gambar 11. Grafik R dengan variasi nilai p dan $\eta = 0$

Dari Gambar 7 sampai Gambar 11 terlihat bahwa semua grafik menuju nilai-nilai yang berkenaan dengan titik kesetimbangan tak bebas penyakit $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ seperti grafik S menuju garis S^* yang bersesuaian dengan nilai p nya, grafik E menuju garis E^* yang bersesuaian dengan nilai p nya dan lain sebagainya. Dapat dikatakan hasil dari simulasi mempunyai simpulan yang sama dengan hasil analisis.

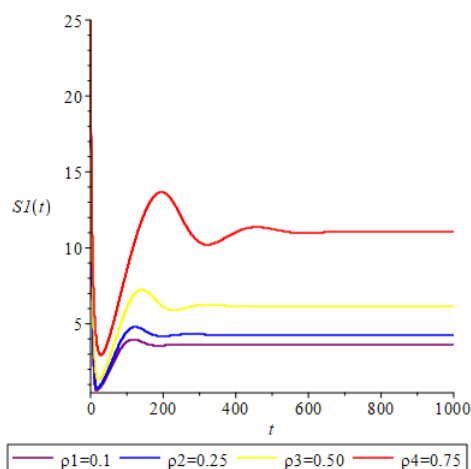
Gambar 7 menunjukkan bahwa banyak individu rentan Covid-19 mengalami penurunan pada awal. Hal ini disebabkan oleh sebagian individu rentan Covid-19 menjadi individu diduga terpapar Covid-19. Gambar 8 bahwa banyak individu diduga terpapar Covid-19 mengalami kenaikan pada awalnya. Hal ini disebabkan oleh penambahan sebagian individu rentan Covid-19 menjadi individu diduga terpapar Covid-19. Kemudian terjadi penurunan pada saat tertentu yang disebabkan oleh sebagian individu diduga terpapar Covid-19 menjadi individu yang terkonfirmasi terinfeksi Covid-19 dan sebagian di karantina. Gambar 9 menunjukkan bahwa banyak individu terinfeksi mengalami mengalami kenaikan pada awalnya. Hal ini disebabkan karena sebagian individu diduga terpapar Covid-19 terkonfirmasi terinfeksi. Kemudian terjadi penurunan pada saat tertentu yang disebabkan oleh sebagian individu terinfeksi menjalani karantina dan sebagian meninggal karena penyakit Covid-19. Gambar 10 menunjukkan bahwa banyak individu di karantina mengalami kenaikan pada awalnya. Hal ini disebabkan karena sebagian individu diduga terpapar Covid-19 dan terinfeksi harus menjalani karantina. Kemudian penurunan pada saat tertentu yang disebabkan oleh sebagian individu yang menjalani karantina sembuh atau meninggal karena infeksi. Gambar 11 menunjukkan bahwa banyak individu yang sembuh atau bebas dari penyakit terus meningkat kemudian turun pada saat tertentu.

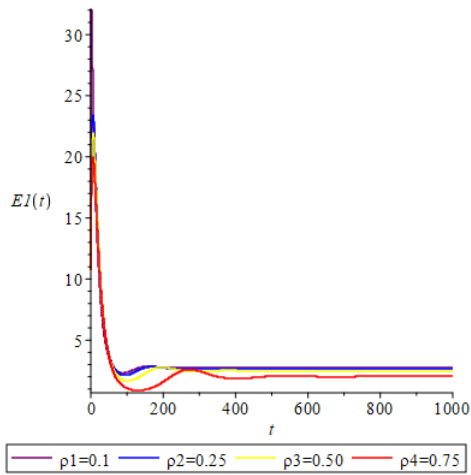
Dalam analisis kestabilan titik kesetimbangan tak bebas penyakit (P_1) digunakan nilai $\eta = 0$. Selanjutnya akan diberikan simulasi untuk nilai η sesuai dengan Tabel 3 yaitu $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$. Variasi nilai ρ untuk $R_0 > 1$ dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$ diberikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Variasi nilai ρ untuk $R_0 > 1$ dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$

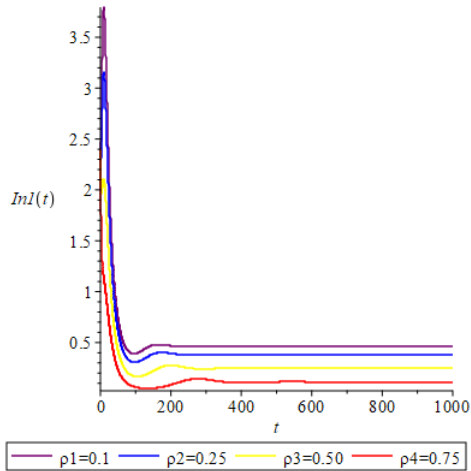
ρ	R_0	S^*	E^*	I^*	Q^*	R^*
0.10	8.82	3.62	2.74	0.46	0.16	21.50
0.25	7.45	4.29	2.67	0.38	0.15	21.24
0.50	5.17	6.18	2.49	0.24	0.15	20.17
0.75	2.89	11.06	2.02	0.11	0.12	16.73

Selanjutnya dibuat simulasi dengan variasi p pada Tabel 6 dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$, diperoleh Gambar 12 sampai Gambar 16.

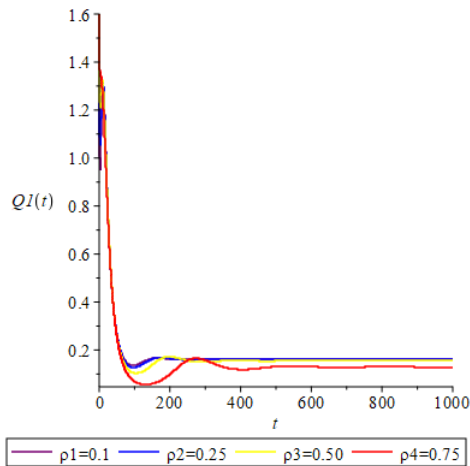
**Gambar 12.** Grafik S dengan variasi nilai p dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$



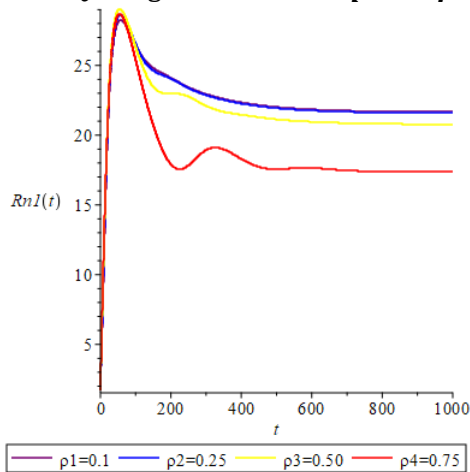
Gambar 13. Grafik E dengan variasi nilai p dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$



Gambar 14. Grafik I dengan variasi nilai p dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$



Gambar 15. Grafik Q dengan variasi nilai p dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$



Gambar 16. Grafik R dengan variasi nilai p dan $\eta = 5,84 \times 10^{-2}$

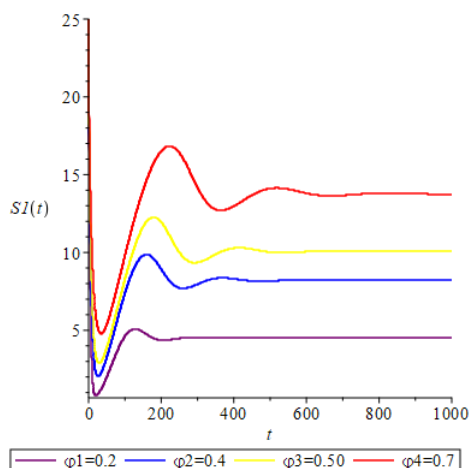
Dari Gambar 12 sampai Gambar 16 terlihat bahwa semua grafik menuju nilai-nilai yang berkenaan dengan titik kesetimbangan tak bebas penyakit $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ seperti grafik S menuju garis S^* yang bersesuaian dengan nilai p nya, grafik E menuju garis E^* yang bersesuaian dengan nilai p nya dan lain sebagainya. Dapat dikatakan hasil dari simulasi mempunyai simpulan yang sama dengan hasil analisis walaupun saat analisis diasumsikan nilai $\eta = 0$.

Untuk mengetahui besar pengaruh karantina individu yang terinfeksi terhadap pencegahan penyebaran penyakit Covid-19, dibuat variasi nilai parameter φ seperti pada Tabel 7.

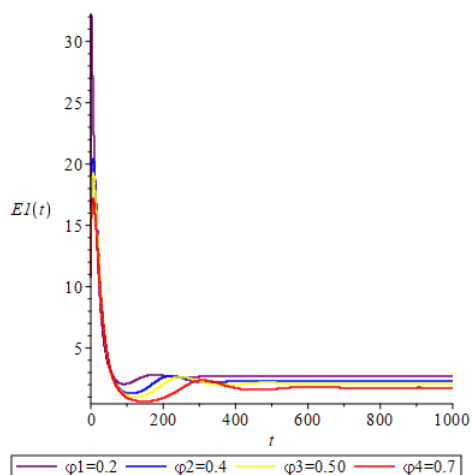
Tabel 7. Variasi Nilai φ dengan $\rho = 0,50$

φ	R_0	S^*	E^*	I^*	Q^*	R^*
0.2	7.11	4.49	2.65	0.36	0.15	20.89
0.4	3.89	8.20	2.30	0.17	0.14	18.93
0.5	3.18	10.05	2.12	0.12	0.13	17.64
0.7	2.32	13.76	1.76	0.07	0.11	14.82

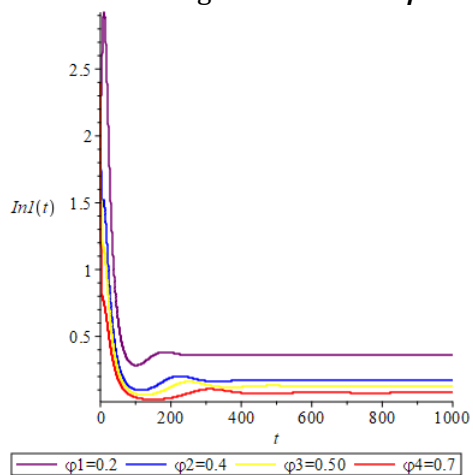
Selanjutnya dibuat simulasi dengan variasi φ pada Tabel 7, diperoleh Gambar 17 sampai Gambar 21.



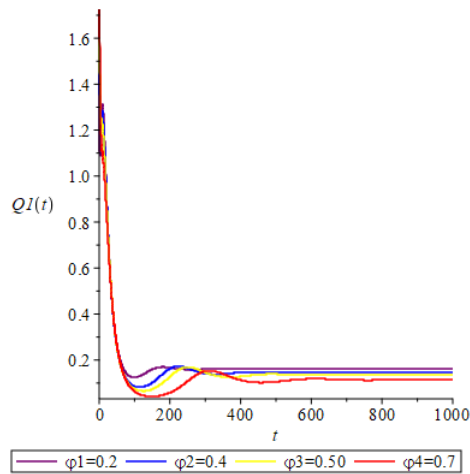
Gambar 17. Grafik S dengan variasi nilai φ dan $\rho = 0,50$



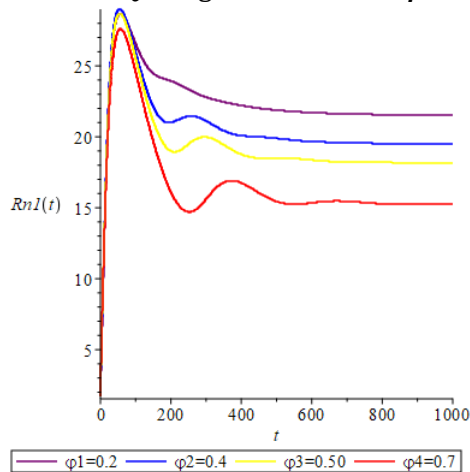
Gambar 18. Grafik E dengan variasi nilai ϕ dan $\rho = 0,50$



Gambar 19. Grafik I dengan variasi nilai ϕ dan $\rho = 0,50$



Gambar 20. Grafik Q dengan variasi nilai ϕ dan $\rho = 0,50$



Gambar 21. Grafik R dengan variasi nilai ϕ dan $\rho = 0,50$

Grafik-grafik pada Gambar 17 sampai Gambar 21 mempunyai perilaku yang hampir sama dengan grafik-grafik pada gambar-gambar sebelumnya. Gambar 17 sampai Gambar 21 juga memperlihatkan bahwa peningkatan nilai ϕ menyebabkan penurunan nilai E , I , Q , dan R . Perubahan yang sangat terlihat terjadi pada grafik S dan R .

SIMPULAN

Model matematika penyebaran Covid-19 dengan pengaruh karantina yang dikembangkan berbentuk SEIQR di mana populasi dibagi menjadi 5 kelas yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Quarantined*, dan *Recovered*. Dari analisis model menghasilkan angka reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta A \theta [\eta + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)(1-p)]}{\mu_1(\theta + \mu_1)[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \phi + \gamma + \eta) + \phi \gamma]}$ dan tiga teorema yang meliputi Teorema 1 tentang eksistensi titik kesetimbangan, Teorema 2 tentang kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, dan Teorema 3 tentang kestabilan titik kesetimbangan tak bebas penyakit. Dari simulasi juga didapatkan hasil yang senada dengan hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan yang dinyatakan dalam Teorema 2 dan Teorema 3.

DAFTAR PUSTAKA

- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110072.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Beay, L. K. (2017). *Model Penyebaran Middle East Respiratory Syndrome (MERS) dengan Pengaruh Pengobatan*. 59–64.
- Chatterjee, K., Chatterjee, K., Kumar, A., & Shankar, S. (2020). Healthcare impact of COVID-19 epidemic in India: A stochastic mathematical model. *Medical Journal Armed Forces India*, 76(2), 147–155.
<https://doi.org/10.1016/j.mjafi.2020.03.022>
- Gumel, A. B., Ruan, S., Day, T., Watmough, J., Brauer, F., Van Den Driessche, P., ... Sahai, B. M. (2004). Modelling strategies for controlling SARS outbreaks. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 271(1554), 2223–2232.
<https://doi.org/10.1098/rspb.2004.2800>
- He, S., Peng, Y., & Sun, K. (2020). SEIR modeling of the COVID-19 and its dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 101(3), 1667–1680.
<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05743-y>
- KEMENKES RI. (2020). Situasi COVID-19. Retrieved from Kementerian Kesehatan Republik Indonesia website:
<https://www.kemkes.go.id/index.php>
- Liu, Z., Magal, P., Seydi, O., & Webb, G. (2020). Understanding unreported cases in the COVID-19 epidemic outbreak in Wuhan, China, and the importance of major public health interventions. *Biology*, 9(3).

- <https://doi.org/10.3390/biology9030050>
- Nishiura, H., Patanarapelert, K., Sriprom, M., Sarakorn, W., Sriyab, S., & Ming Tang, I. (2004). Modelling potential responses to severe acute respiratory syndrome in Japan: The role of initial attack size, precaution, and quarantine. *Journal of Epidemiology and Community Health*, 58(3), 186–191.
<https://doi.org/10.1136/jech.2003.014894>
- Nuraini, N., Khairudin, K., & Apri, M. (2020). Data dan Simulasi COVID-19 dipandang dari Pendekatan Model Matematika. *Preprint*. Retrieved from [http://eprints.itb.ac.id/119/1/COVID19 Corona-NN KKS MA Final.pdf](http://eprints.itb.ac.id/119/1/COVID19%20Corona-NN%20KKS%20MA%20Final.pdf)
- Sifriyani, S., & Mulawarman, U. (2020). *Pemodelan Susceptible Infected Recovered (SIR) Untuk Estimasi Angka Reproduksi Covid-19 Di Kalimantan Timur Dan Samarinda*. (July), 1–13.
- WHO. (2020). Coronavirus disease (COVID-19) Situation Report – 114. In *World Health Organization*.
<https://doi.org/10.1001/jama.2020.2633>