

BAB 5. DUA WAKTU TUNDAAN PADA MODEL COVID 19 MELIBATKAN VAKSINANSI BOOSTER

F Y Saptaningtyas^{1*} dan Ahmadi²

¹Program Studi Matematika FMIPA UNY,

²Program Studi Magister Matematika FMIPA UGM,

Email: * fitrianatya@uny.ac.id

DOI: <https://doi.org/10.15294/mtk.v1i1.95>

Abstrak

Indonesia telah menjalankan program vaksinasi kedua kali untuk mencegah penyebaran COVID 19. Vaksin booster-1 (vaksin ke-3) telah diberikan pada kelompok prioritas. Bab ini akan membahas efek vaksin booster melalui model matematika dengan melibatkan dua waktu tundaan. Kedua waktu tundaan representasi dari perlunya waktu membentuk imun dari individu yang telah vaksin (susceptible ke recovery), mengingat individu yang telah vaksin dua kali belum mendapat kekebalan seumur hidup maka akan dapat kembali menjadi rentan. Teorema Kar digunakan untuk menunjukkan kestabilan asimtotik pada titik ekuilibrium bebas maupun endemik dengan adanya dua waktu tunda. Simulasi numerik menunjukkan bahwa vaksin booster-1 dapat menurunkan bilangan reproduksi dasar sehingga dapat menambah penurunan laju penularan Covid 19. Pada penelitian ini, adanya dua waktu delay tidak merubah kestabilan titik ekuilibrium hanya memperlambat penyebaran.

Keywords: COVID 19, Vaksin Booster, Waktu Tundaan

PENDAHULUAN

Penyebaran COVID 19 menjadi isu yang menarik dalam berbagai aspek keilmuan, termasuk dalam bidang pemodelan matematika. Berbagai model matematika berkembang untuk mengetahui dampak strategi yang dilakukan untuk menangani penyebaran COVID 19. Beberapa penelitian yang mengkaji efektifitas penanganan COVID 19 berdasarkan social distance, penggunaan

masker, karantina dan isolasi telah dilakukan oleh Gumel dkk. pada tahun 2021, serta Abioye dkk. pada tahun 2021 dan Zeb dkk. pada tahun 2019. Model matematika penyebaran COVID 19 di Indonesia berdasarkan vaksinasi dan isolasi mandiri berbasis SEIR (Susceptible, Exposure, Infected, Recovery) telah dilakukan oleh (Suwardi, dkk, 2020). Berdasarkan hasil analisis yang didukung simulasi numerik menunjukkan bahwa vaksinasi dan isolasi dapat memperlambat penyebaran COVID 19.

Sedangkan, beberapa model matematika terkait pemberian vaksin untuk mencegah penyebaran COVID 19 telah dikaji Nuning dkk tahun 2021 selain itu oleh oleh Chukwu dan Fatmawati di tahun 2022. Selain berdasarkan manajemen penanganannya model COVID 19 juga didasarkan adanya waktu tunda. Waktu tunda pada model COVID 19 ini diinisiasi salah satunya oleh perlunya waktu tubuh untuk mendapatkan kekebalan setelah mendapatkan vaksin. Model COVID 19 yang mengkaji mengenai waktu tunda telah dikaji oleh R. Devipriya, dkk tahun 2021. Vaksinasi dan waktu tunda merupakan hal menarik dalam kajian pemodelan COVID 19. Pemberian vaksin dosis satu belum efektif menangani penyebaran COVID 19 (WHO, 2021). Tingkat infeksi setelah adanya vaksin dosis satu masih tinggi sehingga diusulkan vaksin dosis dua. Meskipun vaksin dosis dua tidak memberikan kekebalan seumur hidup, adanya vaksin dosis dua telah mampu mengurangi penyebaran COVID 19 berdasarkan CDC tahun 2021 serta Ricahrd dan Baker tahun 2022.

Data terbaru menunjukkan bahwa sekitar 658 juta jiwa masih terkonfirmasi COVID 19 dengan kematian mencapai 6.8 juta jiwa (WHO, 2022) meskipun telah dilakukan vaksinasi sebanyak dua kali. Berdasarkan Fitriana dan Ahmadi, 2022, telah mengkaji penyebaran model COVID 19 dengan adanya satu waktu tunda dari populasi sembuh setelah mendapat dua kali vaksin COVID 19. Penelitian tersebut belum melibatkan vaksin booster yang ketiga. Pada bab ini, akan dibahas mengenai model matematika penyebaran COVID 19 dengan mempertimbangkan vaksinasi booster yang ketiga dan dua waktu tundaan yang berbasis pada model SEIR. Kajian dinamik dilakukan dengan analisa kestabilan

lokal pada sistem dengan maupun tanpa waktu tundaan. Selain itu, juga dikaji mengenai bilangan reproduksi dasar dan kajian mengenai waktu tundaan. Simulasi numerik diberikan untuk menunjukkan kestabilan titik ekuilibrium bebas COVID 19 maupun endemik. Untuk mengetahui efek adanya waktu tundaan dan vaksin booster pertama atau vaksin dosis ketiga juga diberikan melalui kajian solusi numerik.

METODE

Dalam paper ini dimodelkan penyebaran COVID 19 dengan mempertimbangkan vaksin booster dan waktu tundaan. Model yang didapatkan akan dilakukan analisis secara matematika dengan menentukan titik ekuilibrium, kestabilan lokal dan melakukan simulasi numerik. Dalam hal ini, untuk menentukan kestabilan dari sistem tundaan menggunakan teorema yang telah dijelaskan dalam paper Kar yang dipublikasikan pada tahun 2003.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan dianalisa model matematika COVID 19 dengan mempertimbangkan pemberian vaksin booster dan efek waktu tundaan dalam sebuah model.

Model Matematika

Dalam proses pemodelan ini, populasi dibagi menjadi 5 kelas, yakni kelas yang rentan S , kelas yang *exposed* E , kelas yang terinfeksi I dan kelas yang sembuh R . Kelompok individu yang sembuh terhadap COVID 19 akan diberikan vaksin dosis pertama dan kedua. Sedangkan individu yang rentan merupakan individu yang dapat vaksin booster dosis pertama. Dalam hal ini, individu yang telah di vaksin tidak langsung berpindah dari kelas satu ke kelas lain, hal ini dikarenakan diperlukan waktu tertentu dari masuknya vaksin sampai tubuh dari individu tersebut memberikan respon. Lebih lanjut, waktu tersebut dinamakan waktu tundaan. Waktu

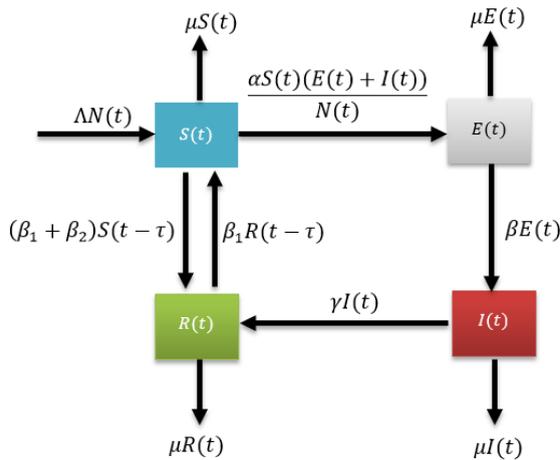
tundaan dari kelas yang rentan dan sembuh diasumsikan sama, yakni sebesar τ .

Untuk lebih lengkap terkait tabel parameter sebagai berikut.

Tabel 1. Parameter

Notasi	Keterangan
Λ	Laju rekrutmen
α	Tingkat interaksi antara kelas yang rentan ke <i>exposed</i> dan rentan ke infeksi COVID 19
β	Tingkat kelas yang <i>exposed</i>
γ	Tingkat infeksi virus COVID 19
μ	Tingkat kematian alami
θ	Tingkat kematian di kelas terinfeksi yang disebabkan oleh COVID 19
β_1	Tingkat vaksinasi dosis 1 dan 2
β_2	Tingkat vaksinasi booster 1

Berdasarkan argument di atas, sehingga didapatkan diagram alir pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir model matematika virus COVID 19

Sehingga didapatkan sistem persamaan diferensial berikut

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda N(t) + \beta_1 R(t - \tau) - (\beta_1 + \beta_2)S(t - \tau) \\ &\quad - \mu S(t) - \frac{\alpha S(t)(E(t) + I(t))}{N(t)} \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\alpha S(t)(E(t) + I(t))}{N(t)} - (\mu + \beta)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta E(t) - (\theta + \mu + \gamma)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (\beta_1 + \beta_2)S(t)(t - \tau) + \gamma I(t) \\ &\quad - \mu R(t) - \beta_1 R I(t - \tau) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Selanjutnya, sistem tersebut akan dicari solusi terbatas. Perlu dipahami bahwa

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) - \theta I(t) \leq \Lambda - \mu N(t) \quad (2)$$

Penyelesaian dari Persamaan (2) adalah

$$N(t) = C e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

Jika diberikan nilai awal $N(0) = N_0$, maka didapatkan

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t} + (1 - e^{-\mu t}) \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)$$

Ambil $t \rightarrow +\infty$, sehingga diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

Artinya banyaknya populasi dalam kurun waktu tertentu akan menuju kapasitas batas, yakni $\frac{\Lambda}{\mu}$. Jadi, penyelesaian Sistem (1) dapat didefinisikan dalam daerah invariant positif \mathcal{M} dengan

$$\mathcal{M} = \left\{ (S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S(t) \geq 0, E(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

Jika Sistem (1) dilakukan nondimensenless, maka diperoleh

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds(t)}{dt} = \Lambda - \mu s(t) - \alpha s(t)(e(t) + n(t)) \\ \quad + \beta_1 r(t - \tau) - (\beta_1 + \beta_2)s(t - \tau) \\ \frac{de(t)}{dt} = \alpha s(t)(e + 1) - (\mu + \beta)e(t) \\ \frac{dn(t)}{dt} = \beta e(t) - (\theta + \mu + \alpha)n(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = (\beta_1 + \beta_2)S(t - \tau) + \alpha n(t) \\ \quad - \mu r(t) - \beta_1 r(t - \tau) \end{array} \right. \quad (2)$$

dengan

$$s(t) + e(t) + n(t) + r(t) = 1$$

Lebih lanjut, dibahas titik ekuilibrium dari Sistem (2) sebagai berikut.

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan suatu titik yang seiring dengan berjalannya waktu nilainya akan menuju suatu konstanta. Untuk menentukan titik ekuilibrium dari Sistem (2), akan dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut

Titik ekuilibrium bebas COVID 19. Ketika nilai dari $\bar{e} = \bar{n} = 0$. Sehingga, Sistem (2) menjadi

$$\begin{cases} n - \mu \bar{s} + \beta_1 \bar{r} - (\beta_1 + \beta_2)\bar{s} = 0 \\ (\beta_1 + \beta_2)\bar{s} - \mu \bar{r} - \beta_1 \bar{r} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dari persamaan kedua Sistem (3), sehingga didapatkan

$$(\beta_1 + \beta_2)\bar{s} = (\mu + \beta_1)\bar{r}$$

$$\bar{s} = \frac{(\mu + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)} \bar{r}$$

$$\bar{s} = \frac{\Lambda(\mu + \beta_1)}{\mu(2\beta_1 + \beta_2 + \mu)} \bar{r} \quad (4)$$

Jika Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan pertama Sistem (3), maka didapatkan

$$\Lambda - (\beta_1 + \beta_2 + \mu)\bar{s} + \beta_1\bar{r} = 0$$

$$\Lambda - (\beta_1 + \beta_2 + \mu) \left[\frac{(\mu + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)} \right] \bar{r} + \beta_1\bar{r} = 0$$

$$\Lambda - (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \beta_2 + \mu)(\mu + \beta_1)\bar{r} + \beta_1(\beta_1 + \beta_2)\bar{r} = 0$$

$$\bar{r} = \frac{\Lambda(\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1 + \beta_2 + \mu)(\mu + \beta_1) - \beta_1(\beta_1 + \beta_2)}$$

$$\bar{r} = \frac{\Lambda(\beta_1 + \beta_2)}{\mu(2\beta_1 + \beta_2 + \mu)}$$

Jadi, titik ekuilibrium bebas COVID 19 adalah

$$M_0 = (\bar{s}, \bar{e}, \bar{n}, \bar{r}) = \left(\frac{\Lambda(\mu + \beta_1)}{\mu(2\beta_1 + \beta_2 + \mu)} \bar{r}, 0, 0, \frac{\Lambda(\beta_1 + \beta_2)}{\mu(2\beta_1 + \beta_2 + \mu)} \right)$$

Hal ini berarti bahwa virus COVID 19 akan hilang dari populasi, karena nilai dari kelas yang exposed dan kelas terinfeksi nol.

Titik ekuilibrium endemik. Titik ini diperoleh ketika nilai dari $\bar{s}, \bar{e}, \bar{n}, \bar{r} > 0$. Sehingga Sistem (2) menjadi

$$\begin{cases} \Lambda - \mu\bar{s} - \alpha\bar{s}(\bar{e} + \bar{n}) + \beta_1\bar{r} - (\beta_1 + \beta_2)\bar{s} = 0 \\ \alpha\bar{s}(\bar{e} + \bar{n}) - (\mu + \beta)\bar{e} = 0 \\ \beta\bar{e} - (\theta + \mu + \alpha)\bar{n} = 0 \\ (\beta_1 + \beta_2)\bar{s} + \alpha\bar{n} - (\mu + \beta)\bar{r} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Jika persamaan ketiga dari Sistem (5) diselesaikan, maka didapatkan

$$\bar{e} = a_1\bar{n} \quad (6)$$

dengan $a_1 = \frac{\theta + \alpha + \mu}{\beta}$.

Jika Persamaan (6) disubstitusikan ke persamaan kedua dari

Sistem (5), maka

$$\alpha \bar{s} \bar{e} + \alpha \bar{s} \bar{n} - (\mu + \beta) \bar{e} = 0$$

$$(\alpha a_1 + \alpha) \bar{s} \bar{n} - (\mu + \beta) a_1 \bar{n} = 0$$

$$\alpha (a_1 + 1) \bar{s} - (\mu + \beta) a_1 = 0$$

$$\bar{s} = \frac{(\mu + \beta) a_1}{\alpha (a_1 + 1)} \quad (7)$$

Apabila Persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan keempat dari Sistem (5), maka didapatkan

$$(\beta_1 + \beta_2) \bar{s} + \alpha \bar{n} - (\mu + \beta_1) \bar{r} = 0$$

$$\bar{r} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \bar{s} + \alpha \bar{n}}{(\mu + \beta_1)} \quad (8)$$

Apabila Persamaan (6), (7), dan (8) disubstitusikan ke persamaan pertama dari Sistem (5), maka didapatkan

$$\Lambda - \mu \bar{s} - \alpha \bar{s} (\bar{e} + \bar{n}) + \beta_1 \bar{r} - (\beta_1 + \beta_2) \bar{s} = 0$$

$$\Lambda - \mu \bar{s} - \alpha \bar{s} \bar{n} (a_1 + 1) + \beta_1 \bar{r} - (\beta_1 + \beta_2) \bar{s} = 0$$

$$\bar{n} = \frac{\Lambda - \mu \bar{s} + \beta_1 \bar{r} - (\beta_1 + \beta_2) \bar{s}}{\alpha (a_1 + 1) \bar{s}}$$

Jadi, titik ekilibrium endemik dari virus COVID 19 adalah

$$M_1 = (\bar{s}, \bar{e}, \bar{n}, \bar{r}) \\ = \left(\frac{(\mu + \beta) a_1}{\alpha (a_1 + 1)}, a_1 \bar{n}, \frac{\Lambda - \mu \bar{s} + \beta_1 \bar{r} - (\beta_1 + \beta_2) \bar{s}}{\alpha (a_1 + 1) \bar{s}}, \frac{(\beta_1 + \beta_2) \bar{s} + \alpha \bar{n}}{(\mu + \beta_1)} \right)$$

Artinya proporsi individu yang terinfeksi dan exposed akan selalu ada dalam populasi dan nilainya akan konvergen ke suatu nilai.

Bilangan Reproduksi Dasar

Motivasi untuk menentukan bilangan reproduksi dasar adalah untuk menentukan tingkat penyebaran dari virus COVID 19 dalam suatu model. Pertama, kita akan menentukan kelas yang dapat

menyebabkan virus tersebut semakin bertambah dan berkurang dalam suatu populasi, yang dalam hal ini adalah kelas exposed dan terinfeksi sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = \alpha s(t)(e + i) - (\mu + \beta)e(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = \beta e(t) - (\theta + \mu + \gamma)n(t) \end{cases} \quad (9)$$

Berdasarkan Persamaan (9), sehingga kita dapat mengkonstruksi

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{s}(e + n) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\mu + \beta)e \\ (\theta + \mu + \gamma)n - \beta e \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, kita dapatkan

$$F = \begin{pmatrix} \alpha \bar{s} & \alpha \bar{s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad V = \begin{pmatrix} \mu + \beta & 0 \\ -\beta & \theta + \mu + \gamma \end{pmatrix}$$

Sehingga, kita dapatkan

$$K = FV^{-1}$$

$$K = \begin{pmatrix} \alpha \bar{s} & \alpha \bar{s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu + \beta} & 0 \\ \frac{\beta}{(\mu + \beta)(\theta + \mu + \gamma)} & \frac{1}{\theta + \mu + \gamma} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \bar{s}}{\mu + \beta} + \frac{\alpha \beta \bar{s}}{(\mu + \beta)(\theta + \mu + \gamma)} & \frac{\alpha \bar{s}}{(\theta + \mu + \gamma)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari nilai K , kita dapatkan nilai eigen terbesar dari matriks K , yakni

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha \bar{s}(\alpha \beta + \theta + \mu + \gamma)}{(\mu + \beta)(\theta + \mu + \gamma)}$$

Lebih lanjut, nilai eigen terbesar dari K disebut dengan bilangan reproduksi dasar atau \mathcal{R}_0 .

Jika nilai dari $\mathcal{R}_0 < 1$, maka virus COVID 19 seiring dengan

berjalannya waktu, virus COVID 19 akan hilang dari populasi tersebut.

Jika nilai dari $\mathcal{R}_0 > 1$, maka virus COVID 19 akan tetap ada dalam populasi tersebut.

Analisis Kestabilan Lokal

Sistem (2) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear, sehingga untuk menentukan kestabilannya diperlukan linearisasi di sekitaran titik ekuilibrium dengan mengambil

$$\begin{aligned}
 u(t) &= s(t) - \bar{s} \rightarrow u(t - \tau) = s(t - \tau) - \bar{s} \\
 v(t) &= e(t) - \bar{e} \\
 w(t) &= n(t) - \bar{n} \\
 x(t) &= r(t) - \bar{r} \rightarrow x(t - \tau) = r(t - \tau) - \bar{r}
 \end{aligned}$$

Akibatnya, Sistem (2) menjadi

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{du(t)}{dt} &= -\alpha(\bar{e} + \bar{n} + \mu)u(t) - \alpha\bar{s}v(t) - \alpha\bar{s}w(t) \\
 &\quad -(\beta_1 + \beta_2)u(t - \tau) + \beta_1x(t - \tau) \\
 \frac{dv(t)}{dt} &= (\alpha\bar{e} + \bar{n})u(t) + (\alpha\bar{s} - \mu - \beta)v(t) \\
 &\quad + \alpha\bar{s}w(t) \\
 \frac{dw(t)}{dt} &= \beta v(t) - (\theta + \mu + \gamma)w(t) \\
 \frac{dv(t)}{dt} &= \alpha w(t) + (\beta_1 + \beta_2)u(t - \tau) \\
 &\quad - \beta_1x(t - \tau)
 \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Sistem (10) dapat dituliskan menjadi berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dw(t)}{dt} \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & \beta & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_6 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & -\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t-\tau) \\ v(t-\tau) \\ w(t-\tau) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix} \quad (11)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= -\alpha(\bar{e} + \bar{n} + \mu) & a_4 &= \alpha\bar{s} - \mu - \beta \\ a_2 &= \alpha\bar{e} + \bar{n} & a_5 &= \alpha\bar{s} - \mu - \gamma \\ a_3 &= -\alpha\bar{s} & a_6 &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

Misalkan penyelesaian dari Sistem (11) adalah

$$u(t) = c_1 e^{-\lambda t}, v(t) = c_2 e^{-\lambda t}, w(t) = c_3 e^{-\lambda t}, x(t) = c_4 e^{-\lambda t}$$

Sehingga didapatkan

$$(\lambda I - A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau}) \begin{pmatrix} c_1 e^{-\lambda t} \\ c_2 e^{-\lambda t} \\ c_3 e^{-\lambda t} \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

Karena nilai dari $e^{-\lambda t} \neq 0$ dan $c_1, c_2, c_3 \neq 0$, sehingga Persamaan (12) menjadi

$$|\lambda I - A_1 - A_2 e^{-\lambda\tau}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_1 + a_6 e^{-\lambda\tau} & -a_3 & -a_3 & -\beta_1 e^{-\lambda\tau} \\ -a_1 & \lambda - a_4 & a_3 & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda - a_4 & 0 \\ -a_6 e^{-\lambda\tau} & 0 & -\gamma & \lambda + \beta_1 e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\beta_1 e^{-\lambda\tau}) \left[-a_2 \begin{vmatrix} -\beta & \lambda - a_4 \\ 0 & -\gamma \end{vmatrix} - a_6 e^{-\lambda\tau} \begin{vmatrix} \lambda - a_4 & a_3 \\ -\beta & \lambda - a_4 \end{vmatrix} \right] \\
&+ (\lambda + \beta_1 e^{-\lambda\tau}) \left[(\lambda - a_1 + a_6 e^{-\lambda\tau}) \begin{vmatrix} \lambda - a_4 & a_3 \\ -\beta & \lambda - a_4 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + a_2 \begin{vmatrix} -a_3 & -a_3 \\ -\beta & \lambda - a_4 \end{vmatrix} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta_1 e^{-\lambda\tau}) [-a_2 \beta \gamma - a_6 e^{-\lambda\tau} (\lambda^2 - 2a_4 \lambda + a_4^2 + \beta a_3)] \\
&+ (\lambda + \beta_1 e^{-\lambda\tau}) [(\lambda - a_1 + a_6 e^{-\lambda\tau}) (\lambda^2 - 2a_4 \lambda + a_4^2 + \beta a_3) \\
&\quad + a_2 (-a_3 \lambda + a_3 a_4 - \beta_3)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^4 + c_2 \lambda^3 + c_8 \lambda^2 + c_9 \lambda + (f_1 \lambda^3 + f_2 \lambda^2 + f_3 \lambda + f_4) e^{-\lambda\tau} \\
&\quad + (f_5 \lambda^2 + f_6 \lambda + f_7) e^{-2\lambda\tau} = 0 \tag{13}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
b_2 &= -a_6 \beta_1 & c_9 &= c_4 + a_2 c_1 \\
b_3 &= 2a_4 a_6 \beta & c_8 &= c_3 - a_2 a_3 \\
b_4 &= -a_6 a_4^2 \beta_1 & c_{10} &= c_6 + c_7 \\
b_5 &= -a_6 \beta a_3 \beta_1 & f_1 &= a_6 + \beta \\
c_1 &= a_3 a_4 - \beta a_3 & f_2 &= \beta_1 c_2 - c_5 \\
c_2 &= -2a_4 - a_1 & f_3 &= a_{10} + \beta_1 c_8 \\
c_3 &= a_4^2 + \beta a_3 + 2a_1 a_4 & f_4 &= b_1 + c_9 \beta_1 \\
c_4 &= -a_1 a_4^2 - a_1 a_3 \beta & f_5 &= b_2 + a_6 \beta_1 \\
c_5 &= a_4^2 a_6 & f_6 &= b_3 - \beta_1 c_5 \\
c_7 &= \beta a_3 a_6 & f_7 &= b_4 + b_5 + a_{10} \beta
\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (13) akan dianalisa menjadi dua kasus,

yakni untuk $\tau = 0$ dan untuk $\tau > 0$ sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk $\tau = 0$, sehingga Persamaan (13) menjadi

$$\lambda^4 + g_1\lambda^3 + g_2\lambda^2 + g_3\lambda + g_4 = 0 \tag{14}$$

dengan

$$g_1 = c_2 + f_1$$

$$g_2 = c_8 + f_2 + f_5$$

$$g_3 = c_9 + f_3 + f_6$$

$$g_4 = f_4 + f_7$$

Dengan menggunakan kriteria R-H, sehingga

1	g_2	g_4
g_1	g_3	0
$g_5 = g_2 - \frac{g_3}{g_1}$	g_4	0
$g_6 = g_3 - \frac{g_1 g_4}{g_5}$		
g_4		

Berdasarkan tabel tersebut, nilai λ akan bernilai real negatif ketika nilai-nilai di kolom pertama harus bertanda sama. Karena nilai yang berada di kolom pertama, baris pertama 1 (positif), sehingga agar akar realnya negatif, nilai

$$g_1 > 0, g_4 > 0, g_5 > 0, g_6 > 0$$

Dengan kata lain, sistem (1) akan stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium

$$(\bar{s}, \bar{e}, \bar{n}, \bar{r})$$

Ketika nilai dari

$$g_1 > 0, g_4 > 0, g_5 > 0, g_6 > 0$$

Kasus 2. Untuk $\tau = iw > 0$ dengan $w \in \mathbb{R}^+$, sehingga Persamaan (13) menjadi

$$(iw)^4 + c_2(iw)^3 + c_8(iw)^2 + c_9(iw) + (f_1(iw)^3 + f_2(iw)^2 + f_3(iw) + f_4)e^{-iw\tau}$$

$$(f_5(iw)^2 + f_6(iw) + f_7)e^{-2iw\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow w^4 - c_2w^3i - c_8w^2 + c_9wi + (-f_1w^3 - f_2w + f_3wi + f_4)(\cos(w\tau) - i \sin(w\tau))$$

$$+(-f_5w^2 + f_6wi + f_7)(\cos(2w\tau) - i \sin(2w\tau)) = 0 \quad (15)$$

Dengan memisahkan bagian real dan imajiner pada persamaan (15), sehingga diperoleh

$$w^8 + h_1w^6 + h_2w^4 + h_3w^2 + h_4 = 0 \quad (16)$$

Persamaan (16) tidak memiliki variasi tanda antar koefisiennya. Berdasarkan aturan tanda Descartes, sehingga persamaan (16) tidak akan mempunyai akar-akar real yang bernilai positif. Lebih lanjut, untuk kasus $\tau > 0$ tidak akan mempunyai nilai τ_k yang menyebabkan terjadinya perubahan kestabilan. Akibatnya, titik ekulibirum M_0 dan M_1 akan selalu stabil asimtotik lokal untuk $\tau > 0$ (Teorema Kar, 2003).

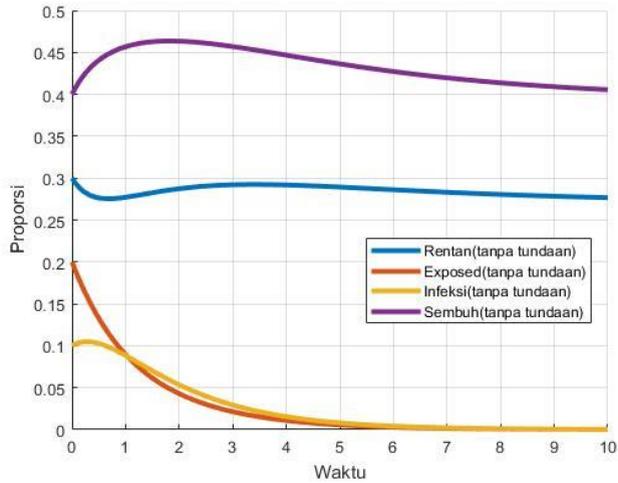
Simulasi Numerik

Titik Ekulibirum Bebas COVID 19

Untuk simulasi ini, diambil beberapa parameter $\Lambda = 0.2, \alpha = 0.6, \beta = 0.8, \beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.8, \mu = 0.3; \theta = 0.02, \gamma = 0.89$. Akibatnya, diperoleh bilangan reproduksi dasar

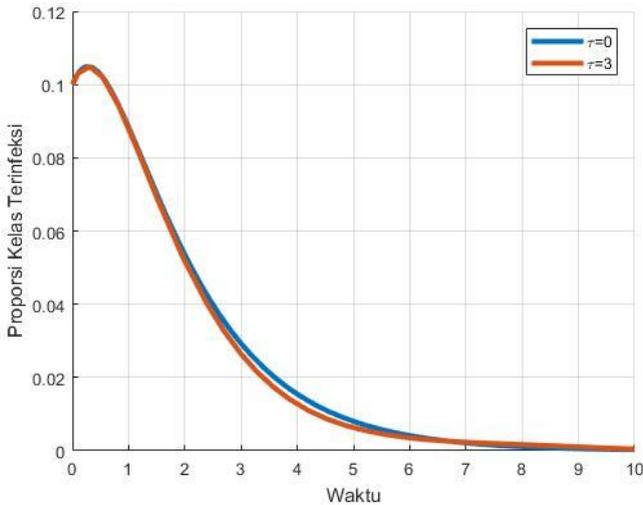
$$\mathcal{R}_0 = 0.20$$

Hal ini berarti bahwa ketika ada satu individu yang terinfeksi tidak akan menularkan ke individu yang lain dan seiring dengan berjalannya waktu akan punah. Dengan kata lain, virus COVID 19 akan hilang dari populasi. Lebih lanjut, simulasinya sebagai berikut.



Gambar 2. Simulasi Numerik Bebas COVID 19 Tanpa Tundaan

Pada kurva solusi tersebut, proporsi individu yang rentan di awal waktu mengalami penurunan, kemudian seiring dengan berjalannya waktu mengalami kenaikan lalu konstan. Akan tetapi, hal ini berbeda dengan proporsi individu yang exposed, di awal waktu selalu mengalami penurunan dan hingga akhirnya konstan menuju nol. Perilaku ini, mirip dengan proporsi individu yang terinfeksi COVID 19.



Gambar 3. Simulasi Numerik Bebas COVID 19 Tanpa dan Dengan Tundaan

Simulasi tersebut merupakan perbandingan simulasi untuk proporsi individu yang terinfeksi COVID 19 tanpa tundaan dan dengan diberikan tundaan sebesar 3 satuan waktu. Dalam simulasi tersebut, pada waktu 2 satuan waktu terjadi perbedaan antara proporsi kelas yang terinfeksi tanpa tundaan dengan waktu diberikan tundaan sebesar 3 satuan waktu. Akan tetapi, proporsi individu yang terinfeksi tanpa dan dengan tundaan seiring dengan berjalannya waktu akan konstan menuju nol.

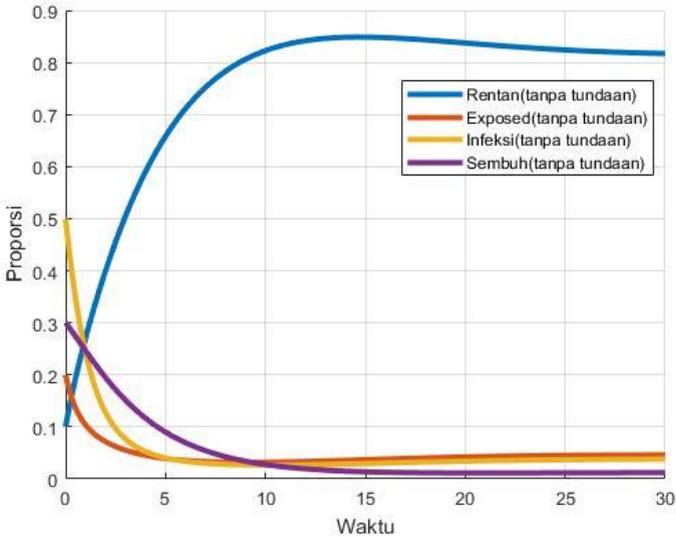
Titik Ekuilibrium Endemik COVID 19

Pada simulasi ini, diambil beberapa parameter $\Lambda = 0.2, \alpha = 0.8, \beta = 0.2, \beta_1 = 0.004, \beta_2 = 0.004, \mu = 0.3; \theta = 0.02, \gamma = 0.89$. Akibatnya, diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0 = 1.17$$

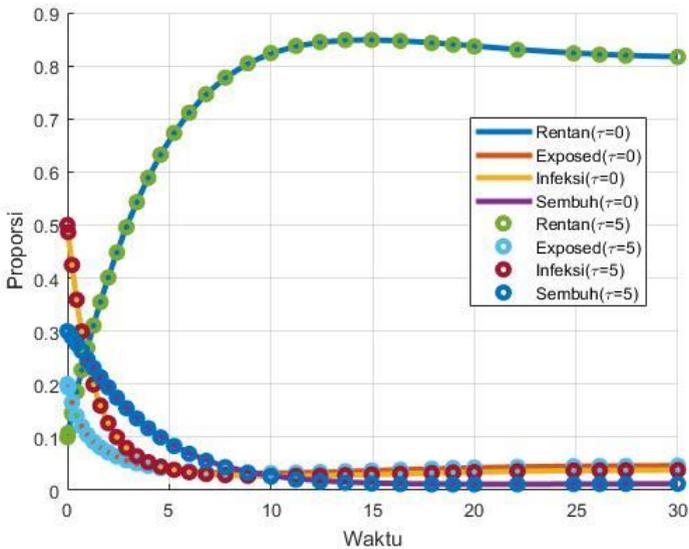
Hal ini berarti bahwa ketika ada satu individu yang terinfeksi akan menularkan ke satu atau dua individu baru dalam populasi tersebut. Lebih lanjut, satu atau dua individu tersebut akan menularkan kembali ke satu atau individu yang lain, begitu seterusnya. Sehingga, virus COVID 19 tidak akan hilang dari

populasi tersebut. Lebih lanjut, simulasinya sebagai berikut.



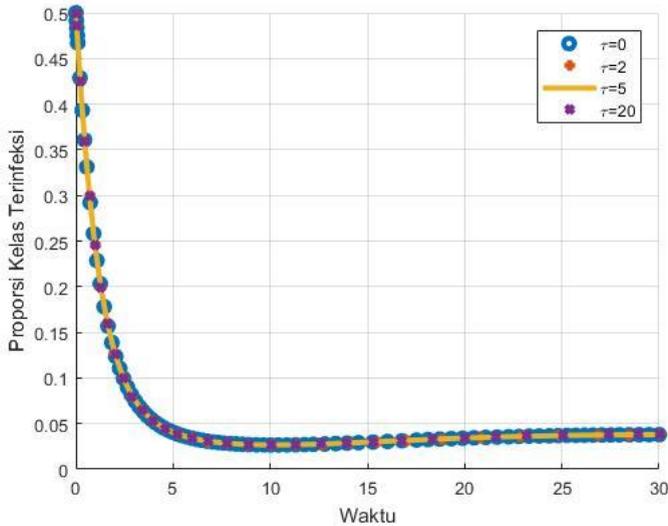
Gambar 4. Simulasi Numerik Endemik COVID 19 tanpa tundaan

Pada simulasi tersebut, proporsi individu yang rentan COVID 19 di awal waktu mengalami kenaikan lalu konstan menuju suatu nilai tertentu. Akan tetapi, untuk kelas yang lain, proporsi individu yang exposed, terinfeksi dan sembuh langsung mengalami penurunan dan seiring dengan berjalannya waktu akan konvergen menuju suatu nilai. Lebih lanjut, untuk kelas yang sembuh nilainya tidak konvergen ke 0.



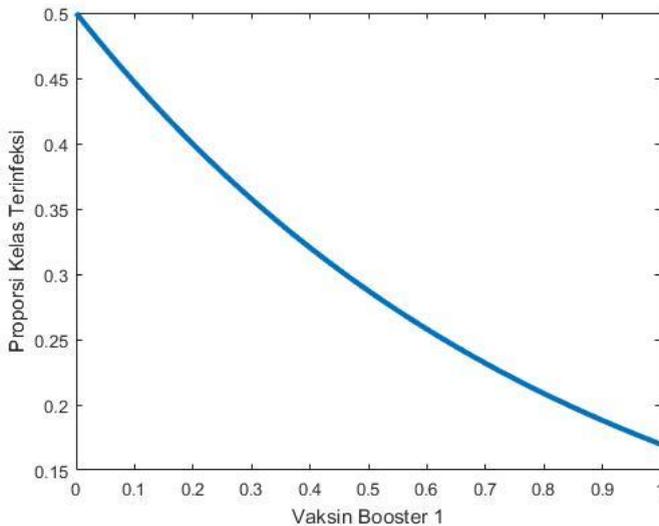
Gambar 5. Simulasi Numerik Endemik COVID 19

Dalam simulasi tersebut, proporsi individu yang terinfeksi dan exposed selalu mengalami penurunan di awal waktu dan seiring dengan berjalannya waktu akan selalu konvergen menuju suatu nilai tertentu yang tak nol. Dengan kata lain, endemi akan selalu terjadi dalam populasi tersebut. Lebih lanjut, simulasi tersebut juga menggambarkan bahwa proporsi individu yang tanpa dan dengan waktu tundaan tidak terjadi perubahan secara signifikan.



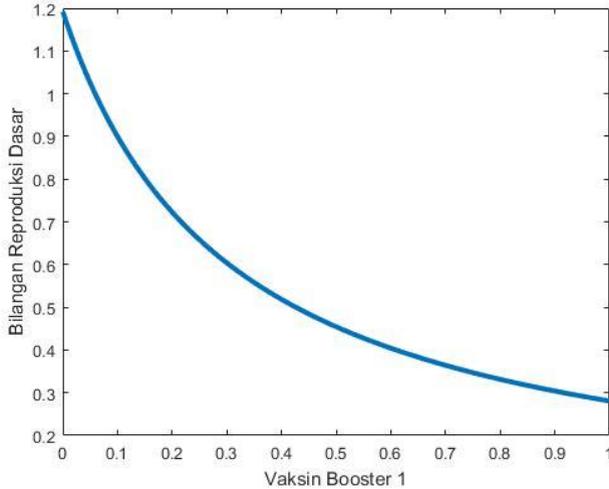
Gambar 6. Simulasi Numerik Endemik COVID 19

Pada simulasi tersebut, proporsi individu yang terinfeksi COVID 19 tanpa dan dengan waktu tundaan tidak mengalami perubahan perilaku yang cukup signifikan. Yakni di awal waktu mengalami penurunan proporsi individu yang terinfeksi, kemudian seiring dengan berjalannya waktu akan konstan menuju suatu nilai tertentu yang tak nol.



Gambar 7. Simulasi Numerik Efek Vaksin Booster 1 dengan Proporsi Kelas Terinfeksi

Dalam simulasi tersebut, semakin vaksin boosternya bertambah dan gencar dilakukan. Akibatnya, proporsi individu yang terinfeksi COVID 19 akan mengalami penurunan. Dengan kata lain, pemberian vaksin booster 1 efektif untuk mencegah penyebaran virus COVID 19. Jika dalam populasi tersebut tidak dilakukan vaksin booster 1, maka hal ini berakibat bahwa akan terjadi banyaknya individu yang terinfeksi sebesar 0.5.



Gambar 8. Simulasi Numerik Efek Vaksin Booster 1 dengan Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan simulasi tersebut, pemberian vaksin booster 1 dapat menurunkan bilangan reproduksi dasar. Dalam hal ini, bilangan reproduksi dasar merupakan interpretasi dari tingkat penyebaran virus COVID 19 dalam suatu populasi. Ketika tidak diberikan vaksin booster 1, akibatnya bilangan reproduksi dasarnya adalah 1,12. Hal ini berarti bahwa individu yang terinfeksi virus COVID 19 antara 1 sampai 2 orang. Kemudian 1 atau 2 orang tersebut menularkan ke 1 atau 2 orang individu yang lain. Hal tersebut berlangsung terus menerus, kalau tidak dilakukan pencegahan akan menimbulkan endemi yang berkelanjutan.

SIMPULAN

Pada model matematika dengan dua waktu tundaan yang sama menunjukkan bahwa adanya waktu tunda hanya memperlambat tingkat infeksi dengan laju yang sama. Teorema Kar menunjukkan bahwa titik ekuilibrium dengan waktu tunda akan dapat stabil. Adanya vaksin booster dapat menekan penularan Covid-19 yang ditunjukkan penurunan bilangan reproduksi dasar seiring dengan tingkat vaksin booster meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

- WHO, Vaccine efficacy, effectiveness and protection, retrieved from <https://www.who.int/news-room/feature-stories/vaccine-efficacy-effectiveness-and-protection>, 2021, on Friday Oct. 15, 2021.
- Centers for Disease Control and Prevention (CDC), COVID-19 vaccine breakthrough infections reported to CDC- United States, Jan 1–April 30, 2021, <https://stacks.cdc.gov>, 2021.
- X. Deng, M. Evdokimova, A. O'Brien, C.I. Rowe, N.M. Clark, A. Harrington, G.E. Reid, S.I. UpRichard, S.C. Baker. (2021). Breakthrough infections with multiple lineages of sars-cov-2 variants reveals continued risk of severe disease in immunosuppressed patients, *Viruses* 13 (9) 1743.
- Centers for Disease Control and Prevention (CDC), COVID-19 vaccine booster shots. Retrieved on June 25, 2022 from <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019.ncov/vaccines/booster-shots.html>~(2022).
- National Institute for Health (NIH), Lasting immunity found after recovery from Covid-19. Retrieved on June 25, 2022 from <https://www.nih.gov/news-events/nihretreat-matters/lasting-immunity-found-after-recovery-from-covid-19>, 2021.
- A.B. Gumel, E.A. Iboi, C.N. Ngonghala, E.H. Elbasha. (2021). A primer on using mathematics to understand COVID-19 dynamics: modelling, analysis and simulations, *Infect. Dis. Model.* 6 148–168.
- A.I. Abioye, J.P. Olumuyiwa, H.A. Ogunseye, F.A. Oguntolu, K. Oshinubi, A.A. Ibrahim, I. Khan. (2021). Mathematical model of COVID-19 in Nigeria with optimal control, *Results Phys.* 20 104598.
- A. Zeb, E. Alzahrani, V.S. Erturk, G. Zaman. (2020). Mathematical model for coronavirus disease 2019 COVID-19 containing isolation class, *Biomed. Res. J.* 3452402.
- Suwardi Annas, Muh. Isbar Pratama, Muh. Rifandi, Wahidah Sanusi, Syafruddin Side. (2020). *Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia*. *Chaos, Solitons and Fractals* 13911007.
- Nuning, Nuraini, K.K. Sukandar, P. Hadisoemarto, H. Susanto, A.I. Hasan, . (2021). *Mathematical models for assessing vaccination scenarios in*

several provinces in Indonesia, Infectious Disease Modelling. Volume 6, Pages 1236-1258.

- C. W. Chukwu, Fatmawati. (2022). *Modelling fractional-order dynamics of COVID-19 with environmental transmission and vaccination: A case study of Indonesia*. J. AIMS Mathematics, 7(3): 4416-4438. doi: 10.3934/math.2022246.
- R. Devipriya et al. (2021). *SEIR Model for COVID-19 Epidemic Using Delay Differential Equation*. J. Phys.: Conf. Ser. 1767 012005.
- Ahmadi dan Widodo. (2020). *Local Stability of Malware Propagation Model on Network Computer with Two Time Delay*. AIP Conference Proceedings 2296, 020087; <https://doi.org/10.1063/5.0030321>.
- Saptaningtyas, F. Y., & Ahmadi, A. (2022). Tinjauan matematis waktu tundaan pada model COVID-19 dengan vaksinasi. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 17(1), 308-320. <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.49372>
- Kar, T. K. (2003). *Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay*. Elsevier: Mathematical and Computer Modelling. Halaman 449-458.