PRISMA 7 (2024): 184-188
PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika
https://proceeding.unnes.ac.id/prisma
ISSN 2613-9189

Beberapa Sifat Ruang Barisan yang Terdefinisi oleh Fungsi Orlicz Komplementer

Haryadi[a,*]

[a] *Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Jl. RTA Milono Km 1,5, Palangka Raya 73111, Indonesia*

** Alamat Surel: haryadi@umpr.ac.id*

Abstrak

Dalam artikel ini akan dikonstruksi ruang barisan melalui fungsi Orlicz komplementer dan selanjutnya didefinisikan normanya. Lebih lanjut akan disampaikan beberapa sifat norma, sifat kekonvergenan, dan sifat-FK pada ruang barisan tersebut.

Kata kunci: fungsi Orlicz, komplementer, barisan, *FK*.

© 2024 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Untuk membahas masalah kekonvergenan pada suatu ruang barisan tidak terlepas dari pembahasan tentang norma, atau setidaknya metriks, yang terdefinisi pada ruang barisan tersebut. Norma atau metriks yang terbentuk tersebut biasanya terkait dengan cara ruang barisan tersebut dikonstruksi. Di dalam ruang barisan yang dilengkapi dengan norma Luxemburg, konstruksi norma ini terkait erat dengan cara pendefinisan ruang barisan tersebut dengan fungsi Orlicz, seperti yang dikerjakan didalam (Khusnussa'adah et al., 2019), (Haryadi et al., 2022) dan (Kustiawan et al., 2023). Sementara itu (Bakery et al., 2020) memperkenalkan konsep norm kuasi pada ruang barisan Orlicz. Perkembangan penelitian dalam ruang barisan Orlicz diantaranya ditelaah didalam (Kuldip et al., 2019) yang melakukan penelitian tentang dual pada ruang barisan Orlicz. Sekanjutnya, aplikasi mengenai ruang barisan Orlicz ditelaah didalam (Raj et al., 2018).

Ruang barisan yang anggotanya semua barisan bernilai real dituliskan dengan ω. Anggota ω dituliskan $x = (x_k)$ atau $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Ruang barisan yang suku-sukunya anggota ω dituliskan $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ dimana $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ untuk setiap $n = 1,2,\cdots$. Seperti telah diketahui, fungsi Orlicz merupakan generalisasi fungsi $|\cdot|^p$ dengan $1 < p < \infty$. Untuk $1 < p < \infty$, fungsi f_x dengan $f_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ untuk setiap $y = (y_k) \in \ell_q$, merupakan fungsional linear pada ruang barisan $l_p = \{x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}$ ((Malkowsky et al., 2000). Dari fungsional linear ini dapat dibentuk norma $\|\cdot\|$ dengan $\|x\| = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\leq 1} |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k|$.

Dalam makalah ini akan dikonstruksi ruang barisan melalui fungsi Orlicz komplementernya. Selanjutnya akan dibentuk norma dan ditelaah beberapa sifat norma dan kekonvergenan pada ruang barisan tersebut. Oleh karena itu perlu disampaikan kembali beberapa pengertian dasar yang berkaitan dengan fungsi Orlicz.

Fungsi $\phi: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dinamakan fungsi Orlicz jika kondisi-kondisi berikut dipenuhi: ϕ kontinu, ϕ konveks, $\phi(-t) = \phi(t)$ dan $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$. Untuk setiap fungsi Orlicz ϕ terdapat fungsi tidak turun dan kontinu kanan p sehingga $\phi(t) = \int_0^t p(t)$. Fungsi ψ dimana $\psi(s) = \sup\{|s|t - \phi(t) : t \geq 0\}$ merupakan fungsi Orlicz dan dinamakan fungsi Orlicz komplementer ϕ. Jika ψ adalah fungsi Orlicz komplementer ϕ maka berlaku Ketaksamaan Young $|st| \leq \phi(t) + \psi(s)$ untuk setiap bilangan real s dan t. Ketaksamaan Young menjadi kesamaan jika $s = p(|t|)sgn(t)$. Pembahasan fungsi Orlicz tersebut dapat diperoleh di dalam (Rao et al., 2002) dan (Musielak, 1983). Fungsi ϕ^{-1} dengan domain $[0, \infty)$ adalah fungsi dengan definisi $\phi^{-1}(s) = t$ jika dan hanya jika $\phi(t) = s$.

To cite this article:
Haryadi. (2024). Beberapa Sifat Ruang Barisan yang Terdefinisi oleh Fungsi Orlicz Komplementer. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 7, 184-188*

Salah satu teori penting dalam ruang barisan adalah teori ruang-FK (Akdemir et al., 2022). Ruang barisan dinamakan ruang *Frechet* jika ruang barisan tersebut lengkap. Ruang barisan $X \subseteq \omega$ dinamakan ruang-K jika untuk setiap k, pemetaan $P_k: X \to \mathbb{R}$ dengan $P_k(x) = x_k$ kontinu. Jika X ruang K dan sekaligus ruang *Frechet*, maka X dinamakan ruang-FK.Selanjutnya, notasi ρ_ϕ menyatakan fungsi pada ruang barisan ω dengan definisi

$$\rho_\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k), \qquad x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$$

Fungi ρ_ϕ tersebut merupakan modular pada ω (Haryadi et al., 2022).

2. Pembahasan

Diberikan fungsi Orlicz ϕ dan fungsi Orlicz kompelenternya ψ. Dibentuk himpunan barisan ℓ_ϕ^* sebagai berikut:

$$\ell_\phi^* = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \omega : \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| < \infty \text{ untuk setiap } (y_k)_{k=1}^{\infty} \text{ dengan } \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \infty \right\}.$$

Teorema 1. Himpunan ℓ_ϕ^* merupakan ruang linear.

Bukti: Diambil sebarang $x, z \in \ell_\phi^*$ dan barisan $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \infty$. Jadi $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| < \infty$ dan $|\sum_{k=1}^{\infty} z_k y_k| < \infty$. Diperoleh
$|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + z_k) y_k| \leq |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| + |\sum_{k=1}^{\infty} z_k y_k| < \infty$, yang berarti $x + z \in \ell_\phi^*$.
(Untuk sebarang bilangan real α, $|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k y_k| = \alpha |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| < \infty$, yakni $\alpha x \in \ell_\phi^*$.

Himpunan $\ell_\phi = \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty\}$ merupakan himpunan bagian ℓ_ϕ^*, sebab jika $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \infty$ maka berdasarkan Ketaksamaan Young

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \infty.$$

Selanjutnya dibentuk fungsi $\|\cdot\|_\phi : \omega \to [0, \infty)$ dengan definisi

$$\|x\|_\phi = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) \leq 1} |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| \qquad (1)$$

Teorema 2. Jika $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\phi^*$ maka $\|x\|_\phi < \infty$.
Bukti: Diandaikan tidak benar bahwa $\|x\|_\phi < \infty$. Jadi untuk setiap n ada barisan $y^n = (y_k^n)_{k=1}^{\infty}$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k^n) \leq 1$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k^n \geq 2^n .$$

Dibentuk barisan $z^n = (z_k^n)_{k=1}^{\infty}$ dengan $z_k^n = \frac{n}{2^n} y_k^n$ untuk setiap k. Dengan menggukan sifat kekonveksan ψ diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(z_k^n) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{n}{2^n} y_k^n\right) \leq \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k^n) \leq 1.$$

Oleh karena itu

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k^n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \frac{n}{2^n} y_k^n \geq n.$$

Dengan demikian $(x_k)_{k=1}^{\infty} \notin \ell_\phi^*$, kontradiksi dengan kenyataan bahwa $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\phi^*$.

Teorema 3. Diberikan fungsi Orlicz ϕ. Fungsi $\|\cdot\|_\phi$ seperti yang dinyatakan dalam persamaan (1) merupakan norma, yakni

(1) $\|x\|_\phi = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$;
(2) $\|\alpha x\|_\phi = \alpha\|x\|_\phi$ untuk setiap $x \in \ell_\phi^*$ dan sebarang bilangan real α;
(3) $\|x + y\|_\phi \le \|x\|_\phi + \|y\|_\phi$ untuk setiap $x, y \in \ell_\phi^*$.

Selanjutnya $\|\cdot\|_\phi$ dinamakan norma-ϕ.

Bukti: Persyaratan (i) $\|\theta\|_\phi = 0$, (ii) dan (iii) diperoleh langsung dari definisi $\|\cdot\|_\phi$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\|x\|_\phi = 0$ berakibat $x = \theta$.
Misalkan $\|x\|_\phi = 0$, yang berarti $\sup_{\sum_{k=1}^\infty \psi(y_k)\le 1} |\sum_{k=1}^\infty x_k y_k| = 0$. Diambil barisan $(y_k)_{k=1}^\infty$ dengan $y_k = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) sgn(x_k)$. Diperoleh $\sum_{k=1}^\infty \psi(y_k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \le 1$. Dengan demikian

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\, \psi^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sup_{\sum_{k=1}^\infty \psi(y_k)\le 1} \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| = 0.$$

Karena $\psi^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) > 0$ untuk setiap k maka $x_k = 0$ untuk setiap k, yang berarti $x = \theta$.

Lemma 4. Jika $\|x\|_\phi \le 1$ dan $y_k = p(|x_k|)sgn(x_k)$ maka $\rho_\psi(y) \le 1$.

*Bukti:*Diketahui $\|x\|_\phi \le 1$. Untuk $x = \theta$ jelas bahwa $\rho_\psi(y) \le 1$. Untuk $x \ne \theta$,
diisalkan $\rho_\psi(y) > 1$. Karena ψ konveks, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{y_k}{\rho_\psi(y)}\right) \le \frac{1}{\rho_\psi(y)} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) = 1.$$

Oleh karena itu $\left|\sum_{k=1}^\infty x_k \frac{y_k}{\rho_\psi(y)}\right| \le \|x\|_\phi$, yakni

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(|x_k|) = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \|x\|_\phi \rho_\psi(y).$$

Akibatnya

$$\rho_\psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(|x_k|) \le \|x\|_\phi \rho_\psi(y)$$

sehingga diperoleh $\|x\|_\phi > 1$, kontradiksi dengan yang diketahui.

Teorema 5. Jika $\|x\|_\phi \le 1$ maka $\rho_\phi(x) = \sum_{k=1}^\infty \phi(x_k) \le \|x\|_\phi$.
Bukti: Diambil $y_k = p(|x_k|)sgn(x_k)$. Berdasarkan Lemma 4, $\sum_{k=1}^\infty \psi(y_k) \le 1$, sehingga berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \|x\|_\phi.$$

Teorema 6. Jika $\|x\|_\phi \ne 0$ maka $\rho_\phi\left(\frac{x}{\|x\|_\phi}\right) \le 1$.

Bukti: Karena $\left\|\frac{x}{\|x\|_\phi}\right\|_\phi \le 1$ maka berdasarkan Teorema 5 diperoleh hasil tersebut.

Teorema 7. (Ketaksamaan Holder)
Jika $x \in \ell_\phi$ dan $y \in \ell_\psi$ maka $|\sum_{k=1}^\infty x_k y_k| \le \|x\|_\phi \|y\|_\psi$.

Bukti: Karena $\rho_\psi\left(\frac{y}{\|y\|_\psi}\right) \le 1$ maka berdasarkan definisi norma-ϕ, $\left|\sum_{k=1}^\infty x_k \frac{y_k}{\|y\|_\psi}\right| \le \|x\|_\phi$, sehingga diperoleh ketasamaan tersebut.

Selanjutnya akan diperkenalkan konsep kekonvergenan barisan di dalam ruang barisan Orlicz. Barisan $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ dikatakan konvergen-ρ_ϕ ke x jika $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\phi(x_k^n - x_k) = 0$.

Teorema 8. Jika $\lim_{n\to\infty}\|x^n - x\| = 0$ maka $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen-ρ_ϕ ke x.

Bukti: Diambil sebarang ε dengan $0 < \varepsilon < 1$. Terdapat bilangan asli N sehingga $\|x^n - x\| < \varepsilon$ jika $n \geq N$. Berdasarkan Teorema 5, untuk $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\phi(x_k^n - x_k) \leq \|x^n - x\| < \varepsilon$$

yang berarti $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ρ_ϕ ke x.

Teorema 9. Ruang ℓ_ϕ^* merupakan ruang lengkap.

Bukti: Misalkan $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di dalam ℓ_ϕ^*, yakni $\|x^n - x^m\|_\phi \to 0$ jika $n, m \to \infty$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Ada bilangan asli N sehingga untuk $n, m \geq N$ berlaku

$$\|x^n - x^m\|_\phi < \frac{\varepsilon}{3}$$

Jadi untuk setiap barisan $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k) \leq 1$ berlaku

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k^m)y_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diambil barisan $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ dengan $z_k = |y_k| sgn(x_k^n - x_k^m)$; jadi $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(z_k) \leq 1$ Oleh karena itu

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x_k^n - x_k^m)y_k| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k^m)z_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dengan demikian $|x_k^n - x_k^m| \to 0$ untuk setiap k jika $n.m \to \infty$, yakni $(x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ merupakaan barisan Cauchy di dalam $\mathbb{R}$. Oleh karena itu ada x_k sehingga $x_k^n \to x_k$ jika $n \to \infty$. Diambil bilangan asli tetap $m \geq N$ dan dibentuk barisan $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Akibatnya

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k)y_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k^m)y_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^m - x_k)y_k\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Karena hal tersebut berlaku untuk sebarang barisan $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k) \leq 1$, maka

$$\|x^n - x\|_\phi = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k)\leq 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k)y_k\right| < \varepsilon$$

yakni (x^n) konvergen ke $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Teorema 10. Ruang ℓ_ϕ^* merupakan ruang-K, yakni pemetaan proyeksi $P_k: \ell_\phi^* \to \mathbb{R}$ dengan $P_k(x) = x_k$ kontinu.

Bukti: Diketahui barisan (x^n) konvergen ke $x \in \ell_\phi^*$, yakni $\|x^n - x\|_\phi \to 0$ jika $n \to \infty$. Diambiil sebarang ε sehingga $0 < \varepsilon < 1$. Terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\|x^n - x\|_\phi < \varepsilon$ jika $n \geq n_0$. Berdasarkan Lemma 4, dengan membentuk barisan $y = (y_k)$ dengan $y_k = sgn(x_k^n - x_k)$, $k = 1,2,\cdots$ diperoleh $\rho(y) \leq 1$. Oleh karena itu

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n - x_k)y_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k^n - x_k| < \varepsilon$$

dan berakibat $|x_k^n - x_k| < \varepsilon$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots$ dan $n \geq n_0$. Ini berarti $x_k^n \to x_k$ jika $n \to \infty$, yakni P_k kontinu.

Berdasakan hasill pada Teorema 9 dan 10, ruang barisan ℓ_ϕ^* dengan norma-ϕ merupakan ruang $Frechet$ sekaligus ruang-K. Dengan demikian diperoleh teorema berikut.

Teorema 11. Ruang ℓ_{ϕ}^{*} merupakan ruang-FK.

3. Simpulan

Untuk sebarang fungsi Orlicz ϕ, dapat dibentuk ruang barisan dengan menggunakan fungsi Orlicz kompelementernya ψ. Ruang yang terbentuk dilengkapi dengan norma-ϕ berupakan ruang lengkap. Lebih lanjut, ruang barisan tersebut merupakan ruang-FK.

Daftar Pustaka

Akdemir, A. O., Ersoy, M. T., Furkan, H., & Ragusa, M. A. (2022). Some Functional Sections in Topological Sequence Spaces. *Hindawi Journal of Function Spaces*, 1–7.

Bakery, A. A., & Elmatty, A. R. A. (2020). Some properties of pre-quasi norm on Orlicz sequence space. *Journal of Inequalities and Applications*, 1–13.

Haryadi, H., & Nurnugroho. (2022). Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya. *Limit: Journal of Mathematic and Its Applications*, *19*(1), 123–133.

Khusnussa'adah, N., & Supama. (2019). Kelengkapan Ruang Barisan yang terdefinisi oleh Fungsi Orlicz. *Eksata: Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA*, *19*(1), 1–14.

Kuldip, Raj, Renu, Anand, & Pandoh, S. (2019). Cesaro Orlicz Sequence Spaces and Their Kothe-Toeplitz Duals. *Math. J. Okayama Univ.*, *61*, 141–158.

Kustiawan, C., Masta, A. A., Dasep, Sumiaty, E., Fatimah, S., & Al Hazmy, S. (2023). Generalized Orlicz Sequence Spaces. *BAKERING: Journal of Mathematics and Its Applications*, *17*(1), 427–438.

Malkowsky, E., & Rakocević, V. (2000). *Sequence Space*. Matematički institut SANU.

Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag.

Raj, K., & Kilicman, A. (2018). Orlicz strongly convergent sequences with some applications to Fourier series and statistical convergence. *New Trends in Mathematical Sciences*, *6*(1), 212–226.

Rao, M. M., & Ren, Z. D. (2002). *Application of Orlicz Spaces*. New York - Basel: Marcel Dekker.