TERAPAN MEKANIKA GEOMETRIK PADA GERAK JATUH BEBAS

Irman Said Prastyo[*], Mukhammad Nurul Huda, Istikomah, dan Heni Sumarti

UIN Walisongo Semarang
*Corresponding author: *irmansaid@walisongo.ac.id*

ABSTRAK

Terapan mekanika geometrik pada berbagai kasus diperlukan guna melihat kesesuaian mekanika geometrik dengan mekanika klasik (Newtonan) biasa. Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan suatu terapan riil konsep manifold pada sebuah system mekanis klasik menggunakan mekanika geometrik. Sistem mekanis yang dipilih adalah gerak jatuh bebas suatu benda bermassa m *di atas permukaan bumi dengan besar percepatan gravitasi g. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Hasil penelitian memperlihatkan bahwa dinamika atau persamaan gerak benda jatuh bebas yang didapatkan melalui persamaan Hamiltonan versi mekanika geometrik memiliki kesesuaian dengan persamaan gerak yang didapatkan melalui hukum Newton, persamaan Lagrange atau persamaan Hamiltonan di mekanika biasa.*

Kata kunci: mekanika geometrik, manifold, sistem mekanis, mekanika klasik.

PENDAHULUAN

Alam dapat dibicarakan menggunakan lebih dari satu ”bahasa”. Dari banyak cara menceritakan alam itu, sebagian orang tertarik memilih matematika sebagai bahasa dengan disertai keyakinan bahwa alam dan hukum-hukum yang berlaku di dalamnya memang matematis (Rosyid, 2005). Meskipun demikian, pemilihan matematika sebagai bahasa ilmu alam, yang dikenal sebagai sains, masih membuka kesempatan bagi berbagai pihak untuk bercerita dengan cara yang berbeda-beda sebab matematika sendiri banyak cabangnya. Matematika telah berkembang mengikuti perkembangan zaman, dari ditemukannya teori bilangan, berkembangnya kalkulus versi Newton, dan kini telah muncul matematika modern dengan beragam definisi, aksioma, hingga teorema-teoremanya untuk keperluan perluasan kajian di berbagai bidang.

Terdapat keinginan di kalangan matematikawan untuk melakukan konstruksi aksioma-aksioma matematis selengkap mungkin guna menciptakan fondasi matematis bagi setiap cabang-cabang fisika. Hal ini sejalan dengan tantangan David Hilbert keenam dalam daftar 23 masalah yang disampaikan olehnya pada tanggal 8 Agustus 1900 dalam Kongres Matematikawan Internasional di Paris yang lebih sering dikenal dengan *Hilbert’s Problems* (Hilbert, 2000). Sebagian dari masalah-

masalah itu kini telah terjawab tetapi beberapa di antaranya masih menjadi misteri yang menunggu untuk dipecahkan.

Mekanika geometrik, yakni mekanika yang disajikan (ditampilkan) menggunakan peranti geometri diferensial, merupakan sebagian jawaban dari masalah keenam di dalam *Hilbert's Problems*. Melalui mekanika geometrik, persamaan Hamiltonan dinyatakan dalam bentuk baru yang lebih umum berupa persamaan forma yang terkait dengan suatu manifold simplektik. Dengan struktur simplektik tertentu (misal struktur simplektik kanonis), persamaan Hamiltonan yang diperumum itu kembali ke bentuk biasa, sebagaimana persamaan Hamiltonan yang telah banyak dikenal (Abraham dan Marsden, 1987; Gupta dan Sharma, 2008; Holm, *et al*, 2009).

Pembicaraan seputar mekanika geometrik lebih berkutat di konsep umum dan tidak banyak digunakan secara langsung untuk meninjau kasus. Sementara itu terapan mekanika geometrik pada berbagai kasus juga diperlukan guna melihat kesesuaian mekanika geometrik itu dengan mekanika biasa. (Ovando, 2006; Ovando, 2009) adalah dua contoh yang telah mencoba menerapkan geometri mekanik pada kasus osilasi kecil dan sekaligus mengaitkannya dengan grup simetri. Untuk memperkaya contoh-contoh terapan, pada artikel ini peneliti mencoba menggunakan mekanika geometrik untuk membahas sistem mekanis klasik berupa gerak jatuh bebas dari benda bermassa m di atas permukaan bumi dengan besar percepatan gravitasi g.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yakni meliputi membaca, mencatat, dan memahami berbagai literatur (baik berupa buku, artikel, ataupun berbagai sumber lain) yang terkait dengan geometri mekanik. Pemahaman materi seputar geometri mekanik dan persamaan Hamiltonan yang diperumum selanjutnya digunakan untuk meninjau kasus disertai dengan perhitungan-perhitungan matematis sampai didapatkan dinamika sistem atau persamaan gerak sistem.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dipaparkan terlebih dahulu teori-teori dasar tentang mekanika dan mekanika geometrik. Setelahnya akan dilakukan tinjauan kasus pada gerak jatuh bebas berikut pembahasannya.

A. Mekanika

Mekanika adalah cabang fisika mengenai gerak dan rehatnya benda dan penyebab gerak atau rehatnya benda itu (KBBI). Definisi mekanika versi KBBI ini sesungguhnya adalah definisi untuk mekanika tertentu saja, lebih tepatnya yaitu untuk mekanika klasik. Mekanika yang lebih umum pada dasarnya memiliki definisi yang lebih luas. Mekanika tidak sekedar berbicara mengenai gerakan benda, tetapi diperumum ke perubahan keadaan benda. Bahkan, istilah "bergerak" tidak lagi dapat diterapkan pada suatu mekanika tertentu, misalnya pada mekanika kuantum.

Setiap mekanika pasti memenuhi prinsip-prinsip umum (*principia universalis*) sebagai berikut (Rosyid,2005):

1. Setiap mekanika harus memiliki konsep tentang ruang (himpunan) keadaan. Keadaan sistem diwakili oleh suatu objek matematis yang memuat "semua informasi fisis" tentang sistem.
2. Pada setiap mekanika harus terdapat aljabar observabel, yaitu himpunan yang memuat objek-objek matematis yang mewakili besaran-besaran fisis.
3. Pada setiap mekanika harus terdapat prosedur (aturan) akses, yaitu cara untuk menentukan hasil ukur (berikut peluang-peluangnya) dari setiap observabel jika keadaan sistem diketahui.

Mekanika yang hendak dibahas dalam penelitian ini adalah mekanika klasik. Mekanika klasik adalah mekanika yang berdasar pada hukum-hukum Newton dan digunakan untuk meninjau benda-benda makroskopik berkelajuan rendah. Ruang keadaan yang biasa digunakan adalah himpunan yang beranggotakan pasangan-pasangan posisi dan momentum. Aljabar observabelnya beranggotakan fungsi-fungsi licin yang bergantung pada posisi dan momentum. Aturan aksesnya sederhana, yakni nilai fungsi (observabel) menyatakan hasil ukur fungsi itu dengan peluang 1 dan tanpa ketidakpastian. Persamaan untuk menentukan dinamika sistem (keadaan sistem fungsi waktu) adalah hukum Newton. Akan tetapi hukum Newton dapat pula ditampilkan dalam persamaan Euler-Lagrange atau persamaan Hamilton.

B. Mekanika Geometrik

Himpunan posisi-posisi umum (konfigurasi-konfigurasi) yang mungkin dari suatu sistem mekanis klasik membentuk manifold dan disebut sebagai ruang konfigurasi. Untingan singgung pendamping bagi ruang konfigurasi suatu sistem mekanis klasik adalah manifold simplektik yang dalam mekanika geometrik dapat digunakan untuk mewakili ruang keadaan (ruang fase) sistem itu.

Andaikan ρ adalah forma k pada manifold M dan X sebuah medan vektor maka $i_K\rho$ didefinisikan sebagai forma $(k - 1)$ yang memenuhi

$$i_K\rho|_m(X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}) = \rho|_m(X(m), X_1, X_2, \ldots, X_{k-1})$$

untuk setiap $m \in M$ dan $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1} \in T_mM$ (ruang singgung di M). Misalkan (M, ω) adalah manifold simplektik dan $H : M \to R$ sebuah fungsi licin, maka medan vektor X_H yang ditentukan oleh:

$$i_{K_H}\omega = dH \tag{1}$$

dinamakan medan vektor Hamiltonan dengan fungsi energi H. Persamaan (1) adalah persamaan Hamiltonan umum (dapat dibuktikan kesesuaiannya dengan persamaan Hamiltonan biasa). Selanjutnya (M, ω, X_H) disebut sebagai sistem Hamiltonan.

Tinjau manifold simplektik (M, ω) dengan koordinat lokalnya dipilih koordinat kanonis $(q^1, q^2, \ldots, q^n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ sehingga memenuhi $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$. Selanjutnya berlaku

$$X_H = \left(\frac{6H}{6p_1}, \frac{6H}{6p_2}, \ldots, \frac{6H}{6p_n}, -\frac{6H}{6q^1}, -\frac{6H}{6q^2}, \ldots, -\frac{6H}{6q^n}\right) \tag{2}$$

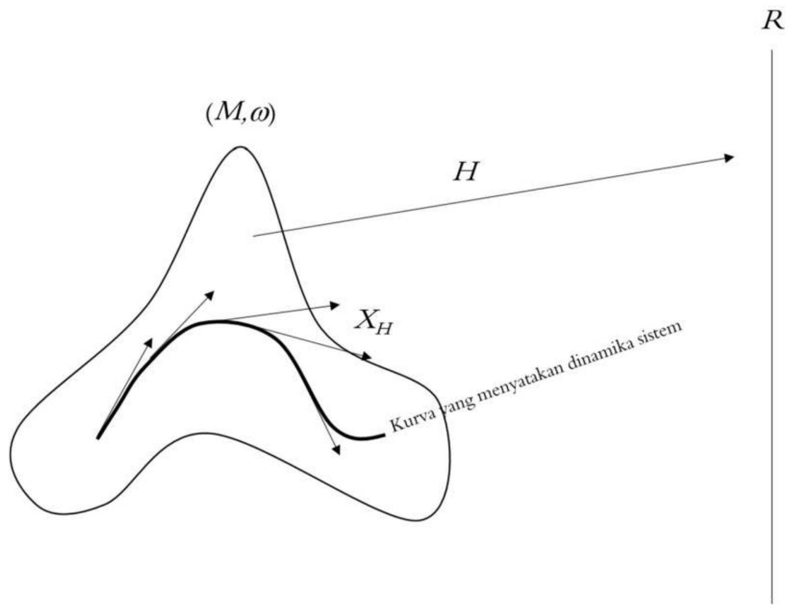
(secara lebih rinci dibahas di Abraham dan Marsden (1987)).

Kurva $(q^1(t), q^2(t), \ldots, q^n(t), p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ selanjutnya menjadi kurva integral untuk X_H jika dan hanya jika persamaan berikut ini terpenuhi:

$$\dot{q}^i = \frac{6H}{6p_i}, \quad p_i = -\frac{6H}{6q^i}, \quad i = 1,2, \ldots, n. \tag{3}$$

Persamaan (3) tidak lain adalah persamaan Hamiltonan biasa seperti yang telah umum dikenal.

Mekanika geometrik dengan sistem Hamiltonan (M, ω, X_H) dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.

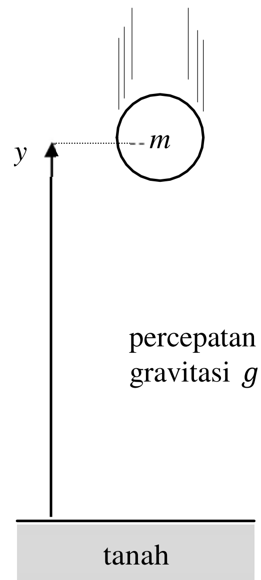


Gambar 1. Ilustrasi mekanika geometrik dengan sistem Hamiltonan $(M, \omega, X_{\mathrm{H}})$

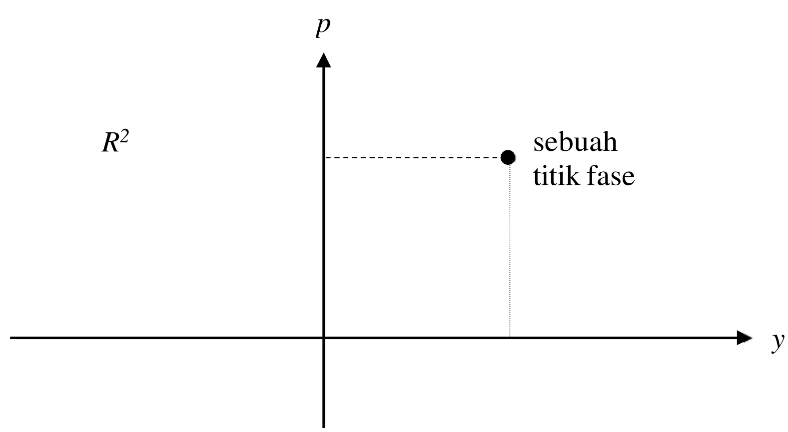
C. Tinjauan Kasus dan Pembahasan

Ditinjau gerak jatuh bebas benda bermassa m di atas permukaan bumi dengan besar percepatan gravitasi g (Gambar 2). Ruang konfigurasi sistem dalam kasus ini berupa garis lurus vertikal sebab sepanjang geraknya benda hanya berada di titik-titik pada garis itu. Posisi benda hendak dilabeli dengan koordinat y yang menyatakan ketinggian benda dari permukaan bumi. Ruang konfigurasi sistem dengan jelas dapat diwakili oleh himpunan bilangan riil (R).

Tidak ada batasan untuk nilai momentum benda. Dengan demikian himpunan momentum juga dapat diwakili oleh R. Akibatnya, ruang fase sistem yang dalam hal ini dinyatakan dengan himpunan pasangan posisi dan momentum, yakni himpunan unsur-unsur (y, p), tidak lain adalah R^2 (Gambar 3). Dapat dipahami secara umum bahwa R^2 adalah manifold. (y, p) selain merupakan unsur juga sekaligus bertindak sebagai label bagi fase yang merupakan koordinat di R^2 dengan domain seluruh ruang.



Gambar 2. Benda yang sedang mengalami gerak jatuh bebas



Gambar 3. Ruang fase R^2

Pada R^2 terdapat sebuah struktur simplektik ω dengan $\omega = dy \wedge dp$. Struktur simplektik ini berimbas pada keberlakuan Persamaan (2) dengan penyesuaian koordinat yang digunakan sebagai solusi bagi Persamaan (1) jika pada sistem telah diberikan suatu fungsi energi H tertentu. Fungsi H yang bersesuaian dengan sistem ini adalah

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + mgy,$$

dengan T dan V berturut-turut menyatakan energi kinetik dan energi potensial sistem. Medan vektor Hamiltonan X_H selanjutnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \left(\frac{p}{m}, -mg\right). \quad (4)$$

Dinamika atau persamaan gerak sistem ditentukan oleh kurva integral bagi medan vektor X_H, yakni kurva $(y(t),\ p(t))$. Berdasarkan Persamaan (4) dan mengingat definisi kurva integral, terdapat kaitan

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v, \quad (5)$$

dengan v menyatakan kecepatan, dan

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = -mg$$

$$p(t) = \int (-mg)\, dt$$

$$mv(t) = -mgt + c$$

$$v(t) = -gt + v_0, \quad (6)$$

dengan c dan v_0 tetapan. Substitusi Persamaan (6) ke Persamaan (5) menghasilkan

$$y(t) = \int (-gt + v_0)\, dt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0, \quad (7)$$

dengan y_0 tetapan.

Dalam gerak jatuh bebas, kecepatan awal benda adalah nol atau $v(0) = 0$. Syarat ini mengimbas $v_0 = 0$ (dari Persamaan (6)). Akibatnya Persamaan (7) menjadi

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2. \quad (8)$$

Persamaan (8) adalah persamaan gerak jatuh bebas sebagaimana yang telah biasa dikenal. Terlihat adanya kesesuaian hasil dari cara biasa dengan cara atau langkah-langkah yang ditempuh di mekanika geometrik.

SIMPULAN

Ruang fase benda yang mengalami gerak jatuh bebas versi mekanika geometrik dapat dinyatakan salah satunya dengan manifold simplektik ($R^2 = \{(y,p)|y,p \in R\}$, $\omega = dy \wedge dp$). Fungsi Hamiltonan yang terkait sistem adalah $H = \frac{p^2}{2m} + mgy$. Selesaian persamaan Hamiltonan $i_{K_H}\,\omega = dH$ adalah $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ yang merupakan persamaan gerak atau dinamika sistem. Selesaian yang diperoleh sesuai dengan hasil yang didapatkan dari cara biasa.

UCAPAN PENGHARGAAN

Ucapan terima kasih disampaikan kepada pihak-pihak yang turut berperan dan mendukung penerbitan artikel ini, utamanya:

1. Segenap panitia Seminar Nasional Fisika Pertemuan Ilmiah XXXV
2. Segenap pengurus PSI (Physical Society of Indonesia) Cabang Jawa Tengah dan Daerah Istimewa Yogyakarta

DAFTAR PUSTAKA

Abraham, M. dan Marsden, J. E. 1987. Foundations of Mechanics, 2nd Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Gupta, V. G. dan Sharma, P. 2008. Hamiltonian System and Classical Mechanics. University of Rajasthan, India.

Hilbert, D. 2000. Mathematical Problems, Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, Vol. 37, No. 4, 407-436.

Holm, D. D., Schmah, T., Stoica, C., dan Ellis, D. C. P. 2009. Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions, Oxford University Press, Inc.

Ovando, G. P. 2006. Small Oscillations and The Heisenberg Lie Algebra. Universidad Nacional de Cordoba, Argentina.

KBBI. 2016. Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI): https://kbbi.kemdikbud.go.id/ [diakses 1 Juli 2021]

Ovando, G. P. 2006. Small Oscillations on R2 and Lie Theory, Revista De La Union Matematica Argentina.

Ovando, G. P. 2009. Hamiltonian Systems Related to Invariant Metrics, IOP Publishing.

Rosyid, M. F. 2005. Mekanika Kuantum: Model Matematis bagi Fenomena Alam Mikroskopis, Tinjauan Non Relativistik. Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.