KAJIAN GEODESIK DAN KELENGKUNGAN PADA RUANG WARNA RESNIKOFF

Mukhammad Nurul Huda*, Irman Said Prastyo

UIN Walisongo Semarang
*Corresponding author: nurmuhammadhuda69@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji geodesik dan kelengkungan pada ruang warna Resnikoff. Kajian seperti ini diperlukan karena untuk diketahui cara paling efektif untuk berpindah dari suatu warna ke warna yang lain. Dengan mengkaji metrik modifikasi Resnikoff dari teori Stiles untuk himpunan $R^{+} \times R^{+} \times R^{+}$, *dapat dicari nilai dari simbol Christoffel yang digunakan untuk menentukan komponen tensor kelengkungan Riemannian tipe (1,3) dan juga kurva geodesik. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kelengkungan pada ruang warna resnikoff bernilai nol yang berarti ruang warna Resnikoff bersifat datar. Di dalam penelitian ini juga diperoleh persamaan kurva geodesik untuk ruang warna Resnikoff dalam selesaian umum.*

Kata kunci *:* ruang warna resnikoff, keragaman riemannian, kelengkungan, geodesic.

PENDAHULUAN

Warna yang kita kenal dalam keseharian, sesungguhnya adalah wakilan dari keberadaan gelombang elektromagnetik dalam rentang panjang gelombang tertentu. Rentang ini yang disebut wilayah cahaya tampak. Istilah wakilan dalam hal ini tidak bermakna bahwa warna sama dengan gelombang. Kemunculan warna melalui sederetan proses yang penjelasannya memerlukan keterlibatan berbagai disiplin ilmu, diantaranya adalah Fisika, biologi, dan psikologi (Berthier, 2019). Bahkan, ketiganya sesungguhnya masih belum benar-benar mampu untuk menjelaskan warna itu sendiri.

Warna hanyalah persepsi otak, yakni cara otak menerjemahkan atau memproyeksikan energi atau sinyal yang dibawa oleh saraf dan berasal dari tangkapan indera penglihatan (mata) terhadap cahaya yang mengenainya dari luar (Berthier, 2019). Dikarenakan warna hanyalah persepsi dan terdapat kesulitan untuk membuktikan kesamaan persepsi setiap orang maka tidak mudah pula membuktikan kesamaan warna yang disaksikan satu orang dengan orang lain. Satu- satunya yang dapat kita pegang adalah keyakinan bahwa sama.

Meskipun terdapat kesulitan dalam penjelasan tentang warna, beberapa orang telah mencoba membuat model guna menjelaskan konsep warna tersebut. Beberapa model itu diantaranya model Munsell, model RGB, model CMYK dan model HSI (Ibraheem, 2012). Resnikoff tahun 1974 memodelkan warna secara matematis dengan Bahasa aljabar untuk yang pertama kalinya. Dalam permodelan ini, yang disebut dengan warna adalah segala sesuatu yang menjadi unsur atau anggota dalam suatu ruang warna. Sementara itu, ruang warna merupakan suatu objek matematis berupa himpunan dengan operasi-operasi yang berlaku didalamnya dan memenuhi sekumpulan aksioma (Resnikoff, 1974).

Telah ditunjukan oleh Resinikoff bahwa ruang warna adalah suatu keragaman (manifold) Riemannian (Resnikoff, 1974). Dengan menggunakan keragaman Riemannian pada ruang warna dapat ditentukan properti-properti yang menyertainya, seperti geodesik, tensor kelengkungan, skalar kelengkungan dan lain sebagainya.

Beberapa penelitian lanjutan terkait ruang warna Resnikoff telah dilakukan oleh beberapa pihak diantaranya adalah penerapan ruang warna resnikoff pada konsep untingan serat utama pertama kali dilakukan oleh Edoardo Provenzi (Provenzi, 2017). Kemudian Edoardo bersama Michel Berthier melakukan formalinasi matematis dan pengaplikasian aljabar jordan pada kolorimeter (Berthier, 2019). Dan yang baru ini, Edoardo dan Michel mengkaji warna yang dirasakan dan sifat-sifatnya menggunakan pendekatan teori pengukuran kuantum (Berthier, 2022).

Penentuan kurva geodesik dalam bentuk selesaian umum persamaangeodesik dan kelengkungan ruang warna Resnikoff belum dilakukan pihak lain sebelumnya. Penentuan geodesik dan kelengkungan ruang warna penting untuk dilakukan. Dengan mengetahui kurva geodesik dan kelengkungan , akan diketahui suatu cara paling efektif untuk "berpindah" dari suatu warna ke warna yang lain. Efektif dalam hal ini adalah dalam makna penggunaan energinya paling rendah dengan perubahan intensitas paling kecil yang mungkin. Di samping itu, penentuangeodesik dan kelengkungan juga bermanfaat untuk pengembangan teori ruang warna ke depannya. Oleh karena itu peneliti dalam hal ini ingin memberikan sumbangsih dengan melakukan penelitian guna menghasilkan persamaan umum kurva geodesik di ruang warna Resnikoff beserta tensor dan skalar kelengkungannya.

Penelitian ini berfokus untuk mengkaji kelengkungan dan bentuk geodesik dari teori ruang warna Resnikoff. Kelengkungan yang dimaksud disini yaitu tensor kelengkungan Riemann yang menentukan bagaimana bentuk kelengkungan ruang yang digunakan Resnikoff pada teorinya, dan juga mencoba untuk menentukan geodesik dari teori ruang warna resnikoff yang akan menghasilkan sebuah kurva yang efisien dari sebuah ruang.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi literatur dengan melakukan kajian pustaka fisika teori tentang kelengkungan dan juga geodesik dari ruang warna Resnikoff yang tahapannya sebagai berikut:

a. Mengkaji metrik yang terkait ruang warna Resnikoff.
b. Menentukan nilai dari $g_{\mu\nu}$ dan juga $g^{\mu\nu}$ dari metrik ruang warna Resnikoff.
c. Menentukan nilai dari simbol Christoffel.
d. Menghitung nilai tensor Riemannian tipe (1,3) untuk menentukan kelengkungan ruang warna Resnikoff dengan menggunakan bekal simbol Christoffel dan basis-basis yang telah ditunjukkan pada metrik.
e. Menentukan bentuk umum dari geodesik dari ruang warna resnikoff dengan menggunakan bekal simbol Christoffel dan basis-basis yang telah ditunjukkan pada metrik.

GEOMETRI RIEMANNIAN

A. Kelengkungan

1. Simbol Christoffel

Dalam menentukan kelengkungan suatu ruang bergantung pada koneksi yang didefinisikan dari metrik. Koneksi dalam hal ini dapat juga di ungkapkan dengan keterlibatan metrik yang secara lokal disajikan dalam Simbol Christoffel. Simbol Christoffel didapatkan dengan mendefinisikan suatu turunan kovarian dari suatu tensor yakni sebagai berikut.

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_k}_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_l} \equiv \partial_\sigma T^{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_k}_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda,\mu_2,\cdots\mu_k}_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1,\lambda,\cdots\mu_k}_{\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_l} + \cdots$$

$$- \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\lambda,\mu_2,\cdots\mu_k}_{\lambda,\nu_2,\cdots\nu_l} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T^{\lambda,\mu_2,\cdots\mu_k}_{\nu_1,\lambda,\cdots\nu_l} -$$

objek tensor disini yaitu metrik $g_{\mu\nu}$ yang merupakan tensor tipe (0,2), oleh karena itu tensor menjadi $T^{\mu1,\mu2,\ldots\mu k}$ menja maka persamaan menjadi

di $T_{\nu\nu}$

v1,v2,...v1 1, 2

$$\nabla_\sigma T_{\nu_1\nu_2} = \partial_\sigma T_{\nu_1\nu_2} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T_{\lambda\nu_2} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T_{\nu_1\lambda},$$

dengan $T_{\nu1,\nu2} = g_{\mu\nu}$,

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda},$$

Didefinisikan suatu koneksi unik pada keragaman yang di ungkapkan melalui metrik $g_{\mu\nu}$,, diberikan syarat yaitu

- Bebas torsi : $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\Gamma_{\nu\mu}$,
- Kekompatibilitas dari metrik: $A\sigma g_{\mu\nu}$, = 0,

berdasarkan sifat kekompatibilitasan metrik, dengan dilakukan permutasi pada ketiga index (σ, μ, ν), yang sedemikian rupa didapatkan:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma} + 2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu} g_{\nu\lambda\sigma} = 0,$$

kemudian untuk memperoleh simbol Christoffel, persamaan diatas diubah menjadi persamaan sebagai berikut.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

$$g^{\kappa\sigma} g_{\lambda\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

dengan $g^{\kappa\sigma} g_{\lambda\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\kappa}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$, kemudian didapatkan persamaan

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

persamaan untuk simbol Christoffel ditunjukkan diatas. Notasi $\Gamma_{\mu\nu}$ terlihat seolah-olah tensor, akan tetapi simbol Christoffel bukanlah tensor, melainkan simbol Christoffel merupakan koefisien koneksi (Carol, 1997;Nakahara, 2003).

a. Tensor Riemannian

Tensor Riemannian atau bisa juga disebut dengan tensor kelengkungan Riemannian merupakan tensor dengan tipe (1,3) yang memetakan tiga buah himpunan medan vektor pada suatu keragaman ke suatu himpunan medan vektor, yang secara matematis dapat dituliskan

$$R: \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) ,$$

dengan

$$R(X, Y, Z) = A_X A_Y Z - A_Y A_X Z - A_{[X,Y]} Z ,$$

R(X, Y, Z) dapat dituliskan menjadi R(X, Y)Z, operator R terlihat seperti beraksi pada

Z, sehingga memenuhi

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z ,$$

yang dapat dibuktikan dengan

$$R(X, Y)Z = A_X A_Y Z - A_Y A_X Z - A_{[X,Y]} Z$$

$$= -(A_Y A_X Z - A_X A_Y Z + A_{[X,Y]} Z)$$

$$= -(A_Y A_X Z - A_X A_Y Z - A_{[Y,X]} Z).$$

Tensor R harus memenuhi pemetaan multilinier. Dari pemetaan multilinier, dapat diketahui bahwa R memenuhi.

$$R(X, Y)Z = X^{\mu} Y^{\nu} Z^{\lambda} R(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})\, \partial_{\lambda}$$

R merupakan medan tensor tipe (1,3) dikarenakan R memetakan tiga medan vektor ke sebuah medan vektor

$$R(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})\, \partial_{\lambda} = R^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, \partial_{\gamma},$$

dengan menggunakan konsep inner produk $\langle , \rangle$.

$$\langle d\, x^{m}, R(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})\, \partial_{\lambda} \rangle = \langle d\, x^{m}, R^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, \partial_{\gamma} \rangle .$$

$$= R^{\gamma}_{\lambda\mu\nu} \langle d\, x^{m}, \partial_{\gamma} \rangle.$$

$$= R^{\gamma}_{\lambda\mu\nu}\, \delta^{m}_{\gamma}$$

$$= R^{m}_{\lambda\mu\nu} ,$$

dengan menghitung nilai medan tensor $R^{m}_{\lambda\mu\nu}$ disertai definisi dari tensor kelengkungan Riemannian, didapatkan persamaan tensor kelengkungan Riemannian yaitu:

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\mu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\kappa}_{\nu\eta}.$$

(Nakahara, 2003)

Kelengkungan ruang sebagaimana yang dikenal dalam keseharian (untuk ruang 1 dimensi dan 2 dimensi) tidak dapat langsung terlihat dari nilai tensor kelengkungan Riemannian, hal ini dikarenakan tensor kelengkungan Riemannian berlaku lebih umum untuk sembarang dimensi. Akan tetapi, ketika tensor kelengkungan Riemannian $R^{m}{}_{\lambda\mu\nu} = 0$ dapat dipastikan bahwa ruang tersebut datar, karena kelengkungan tersebut bernilai nol seragam di segala sisi. Sebagai contoh bentuk ruang datar 2 dimensi adalah seperti selimut silinder atau bidang datar biasa. Ketika nilai tensor kelengkungan $R^{m\lambda\mu\nu} \neq 0$, "bentuk" ruang salah satunya dapat diketahui dari kelengkungan bagiannya (*sectional curvature*) atau yang lebih dikenal dengan nama kelengkungan Gaussian K(X, Y) yang dapat diperoleh yaitu

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2}$$

$$= \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

dengan X, Y $\in$ T(M) dan Rm(X, Y, X, Y) merupakan tensor kelengkungan Riemannian yang kovarian dengan 4 medan tensor, |X|, |Y| merupakan norma dari medan vektor X dan Y dan $\langle X, Y\rangle$ merupakan produk skalar. Kemudian ketika $K(\mu, \nu) > 0$, kelengkungan ruang secara dua dimensi dapat diwakilkan oleh permukaan bola, ketika $K(\mu, \nu) < 0$, kelengkungan ruang secara dua dimensi dapat diwakilkan oleh permukaan hiperbolik. (Lee, 1997).

B. Geodesik

Di ambil suatu kurva yang terdapat pada suatu keragaman, kemudian dapat didefinisikan suatu transport paralel dari suatu vektor sepanjang kurva.

$$c: (a, b) \to M.$$

Andaikan dari suatu peta tunggal (U, φ) dengan koordinatnya berupa $x = \varphi(p)$, dengan X merupakan suatu medan vektor (setidaknya) sepanjang kurva c(t).

$$X|_{c(t)} = X^{\mu}(c(t))\, \partial_{\mu}|_{c(t)},$$

dengan $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ merupakan basis pada koordinat.

Andaikan X pada kondisi $\nabla_V X = 0$ untuk setiap $t \in (a, b)$. maka X merupakan transport paralel sepanjang kurva c(t) dimana $V = \frac{d(\varphi(c(t)))}{dt} = \left(\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right)\partial_\mu\Big|_{c(t)}$ yang merupakan vektor singgung pada kurva c(t), dikarenakan kondisi $\nabla_V X = 0$ maka dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu(c(t))}{dt}X^\lambda = 0.$$

Namun, jika medan vektor X dalam hal ini digantikan V(t) dengan kondisi ini ($\nabla_V V = 0$), maka kurva c(t) adalah geodesik yang merupakan kurva paling memungkinkan terlurus pada keragaman Riemannian. Secara umum, persamaan geodesik yaitu:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0,$$

dengan $\{x^\mu\}$ koordinat dari c(t) (Nakahara, 2003).

Ruang Warna

Banyak warna di alam semesta yang kita ketahui, model RGB (red green blue) menjadi salah satu model untuk menyederhanakan warna-warna tersebut dengan warna merah, hijau dan biru sebagai warna dasar.Jika kita menarik 3 warna dasar tersebut menjadi sebuah sistem koordinat, maka terciptalah sebuah sitem koordinat 3 dimensi dengan warna merah, hijau dan biru menjadi basisnya.

Dengan sistem koordinat yang digunakan berupa himpunan dari suatu model warna RGB, dengan ditarik kelingkup yang lebih luas yaitu kemodel ruang,dalam hal ini disebut ruang warna P . Ruang warna yaitu himpunan-himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku. Resnikoff telah merumuskan aksioma-aksioma untuk membatasi suatu himpunan itu berlaku untuk ruang warna. Resnikoff menganalisa sifat geometris dan topologi dari ruang warna P dengan mengacu pada aksioma schrödinger.

1. Jika $x \in P$ dan $\alpha > 0$, maka $\alpha x \in P$.

Aksioma ini menyatakan bahwa α yang merupakan bilangan yang sebanding dengan intensitas dari suatu warna, selalu bernilai positif yang menjadikan warna tersebut dapat kita rasakan keberadaannya.

2. Jika $x \in P$, maka tidak akan ada suatu $y \in P$ yang sedemikian rupa sehingga $x + y = 0$.

Aksioma ini menyatakan tidak ada superposisi dari suatu cahaya yang dapat menghilangkan cahaya itu sendiri.

3. Untuk setiap $x, y \in P$ dan $\alpha \in [0,1]$, maka $\alpha x + (1 - \alpha)y \in P$.

Aksioma ini menyatakan bahwa kombinasi dari beberapa warna menjadikan kombinasi warna masih dalam lingkup ruang warna dan juga himpunan yang berlaku di ruang warna merupakan himpunan yang bersifat cembung (*convex*).

4. Setiap himpunan 4 warna, himpunan itu merupakan himpunan yang gayut linier. Oleh karena itu, jika ada $x_k \in P$, $k = 1, \dots, 4$, maka terdapat $\alpha_k \in R$ dan $\alpha_k \neq 0$ sedemikan rupa sehingga

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k x_k = 0$$

dari aksioma 4 ini, dapat ditarik kesimpulan bahwa dimensi dari ruang vektor yang merupakan *span* dari ruang warna kurang atau sama dengan 3 dimensi.

5. Suatu ruang warna P homogen secara lokal dengan mengikuti perubahan warna latar belakang

Aksioma ini mejelaskan tentang homogenitas lokal dari ruang warna P terhadap perubahan latar belakang. Jika kita menembakkan suatu cahaya dengan warna tertentu di suatu titik, maka warna yang dirasakan oleh pengamat bergantung pada warna dari latar belakangnya, dan ketika warna dari latar belakang diubah, maka presepsi pengamat terhadap warna berubah dari cahaya asal. Transformasi latar belakang B oleh Resnikoff diwakili dengan grup:

$$GL_{+}(P) \coloneqq \{B \in GL(\mathcal{V}): det(B) > 0 \wedge B(x) \in P, \forall x \in P$$

dimana $GL(\mathcal{V})$ grup operator linier di $\mathcal{V}$ yang memiliki invers, dengan syarat determinan dari perubahan transformasi pada latar belakang B lebih besar daripada 0 dan juga perubahan transformasi latar belakang disetiap titik ruang warna B(x) masih dalam lingkup dalam ruang warna, dan oleh sebab itu transformasi ini mempertahankan warna yang dikenainya untuk tetap berada di ruang warna P dan stabil didalam tindakannya.

$\mathrm{GL}(P)$ merupakan grup transformasi yang mempertahankan kelinieran dari ruang vektor $\mathcal{V}$. Dengan memperhatikan P sebagai ruang topologis biasa, dari aksioma 5 ini menunjukan bahwa untuk setiap $x \in P$ terdapat himpunan terbuka $U \subset P$ sehingga setiap $y \in U$ dapat dinyatakan sebagai $y = gx$ untuk beberapa $g \in \mathrm{GL}(P)$.

Dari pengamatan perubahan transformasi latar belakang, dapat dikatakan bahwa P merupakan homogen secara lokal terhadap $\mathrm{GL}_{+}(P)$, akan tetapi, P bersifat cembung sesuai dengan aksioma 3. Oleh sebab itu, perubahan latar belakang bisa dinyatakan homogen secara global.

$\mathrm{GL}(P)$ merupakan subgrup dari $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ yang termasuk kedalam grup lie. Oleh karena itu, dalam teori kehomogenan ruang, P dapat diidentifikasi sebagai ruang homogen $\mathrm{GL}(P)/\mathrm{K}$, dengan K isomorfis terhadap subgrup $\mathrm{GL}(P)$ yangmenyisakan beberapa bagian di P yang berupa subgrup tertutup dari grup ortogonal yang berdampak pada subgrup kompak $\mathrm{GL}(P)$. Dalam pemetaan $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathrm{R}^+$ dengan mempertahankan P, maka disetiap $g \in \mathrm{GL}(P)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $g = \alpha \circ h$ dimana $\alpha \in \mathrm{R}^+$ dan $h \in \mathrm{SL}(P) = \mathrm{GL}(P) \cap \mathrm{SL}(\mathcal{V})$, $\mathrm{SL}(\mathcal{V})$ merupakan bagian dari $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ yang matrixnya mewakili basis dari $\mathcal{V}$ dengan determinan +1. Maka dari itu, $\mathrm{GL}(P) = \mathrm{R}^+ \times \mathrm{SL}(P)$ dengan K sebagai subgrup kompak dari $\mathrm{SL}(P)$.

Resnikoff terinpirasi dari model kasus Helmholtz dalam memodelkan P serta memodifikasi model Stiles dari model Helmholtz. Didapatkan model ruang homogen

$$P = \mathrm{GL}(P)/\mathrm{K} \simeq \mathrm{R}^+ \times \mathrm{SL}(P)/\mathrm{K} \simeq \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$$

Resnikoff juga menggunakan ruang homogen lain berikut untuk model ruang warnanya.

$$P = \mathrm{GL}(P)/\mathrm{K} \simeq \mathrm{R}^+ \times \mathrm{SL}(P)/\mathrm{K} \simeq \mathrm{R}^+ \times \mathrm{SL}(2, \mathrm{R})/\mathrm{SO}(2),$$

namun peneliti disini lebih berfokus pada himpunan $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$ untuk mengkaji ruang warna resnikoff.

6. Metrik Riemannian di P yang mengukur perbedaan persepsi yaitu $\mathrm{GL}(P)$ merupakan metrik invarian.

Dalam aksioma ini dapat ditentukan metrik dari persepsi ruang warna yaitu berupa metrik invarian dan juga metrik riemannian. Oleh karena itu, jika terdapat x, y ∈ P dan juga g ∈ GL(P) maka terdapat didalamnya pemetaan x ↦ gx = y, dan jika terdapat G_x yang berupa metrik didalam ruang singgung T_x terhadap P di x yang berakibat menghasilkan metrik Riemannian di P, maka differensial dg terhadap g mengakibatkan isomorfime dari T_x di T_{gx} dan G_{gx} didefinisikan menjadi

$$G_{gx}(dgX) = G_x(X),\ X \in T_x$$

GL(P) beraksi transitif pada P, penentuan metriknya berdasarkan metrik dari G_X di T_x tertentu tetapi untuk sembarang x ∈ P. Dengan mengidentifikasikan x dengan koset K dalam merealisasikan P sebagai ruang homogen GL(P)/K. kemudian ternyata gx = x jika g ∈ K dan karenanya metrik G_x pada ruang singgung T_x harus K invarian, yaitu $G_x(dgX) = G_x(X)$ untuk g ∈ K dan X ∈ T_x.

Jika $P = R^+ \times R^+ \times R^+$, dari sini K = ∅ dan K secara invarian tidak memberikan batasan dalam metrik. Namun, metrik invarian GL(P) harus berupa penjumlahan metrik pada setiap faktor yang invarian pada R^+. Karena metrik invarian R^+ ditentukan oleh konstanta positif pada ruang singgung disuatu titik, secara jelas disini bahwa semua metrik R^+ invarian di R^+, $ds^2 = \left(\frac{dx}{x}\right)^2$ merupakan metrik invarian R^+ pada R^+. Maka dari itu, secara umum metrik invarian GL(P) pada $P = R^+ \times R^+ \times R^+$ yaitu

$$ds^2 = \alpha_1\left(\frac{dx_1}{x_1}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{dx_2}{x_2}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{dx_3}{x_3}\right)^2,$$

dimana α_k merupakan konstanta positif. Metrik ini merupakan bentuk umum dari teori Stiles dari metrik Helmholtz (Resnikoff, 1974).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam menentukan geodesik dari metrik model ruang warna Resnikoff, disini digunakan metrik dari wakilan model ruang warna Resnikoff untuk $R^+ \times R^+ \times R^+$, dari metrik tersebut kemudian ditentukan matriks $g_{\mu\nu}$ yang diambil dari koefisien tiap-tiap suku dari metriks, setelah itu dicari nilai invers dari $g_{\mu\nu}$ dalam hal ini disimbolkan sebagai $g^{\mu\nu}$. Setelah itu dihitung komponen simbol Christoffel yang dalam hal ini terdapat 27 komponen. Hasil yang didapatkan dari penghitungan simbol Christoffel kemudian dapat digunakan untuk menghitung tensor kelengkungan Riemannian. Dengan ditententukannya tensor kelengkungan Riemannian, kemudian dapat diketahui "bentuk" dari model ruang warna Resnikoff.

Dalam menentukan geodesik dengan bekal yang didapat dari komponen simbol Christoffel dan kemudian diterapkan pada persamaan umum geodesik tiap- tiap komponen simbol Christoffel, maka didapatkan persamaan kurva geodesik untuk ruang warna Resnikoff.

Seperti halnya sebelumnya disampaikan, Resnikoff memodifikasi ruang warna P dari model Stiles dan Helmholtz. Kemudian didapatkan metrik ruang warna Resnikoff untuk $R^+ \times R^+ \times R^+$. Dengan tetapan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^+$ dan $(x_1, x_2, x_3) \in P$. Persamaan metrik ruang warna Resnikoff $R^+ \times R^+ \times R^+$ dapat diubah bentuk menjadi:

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha_1}{x_1^2}\right) dx_1^2 + \left(\frac{\alpha_2}{x_2^2}\right) dx_2^2 + \left(\frac{\alpha_3}{x_3^2}\right) dx_3^2$$

dari metrik diatas, bisa didapatkan matriks dari $g_{\mu\nu}$ dan juga invers matriksnya $g^{\mu\nu}$ yang diambil dari konstanta tiap-tiap suku pada persamaan diatas,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{x_3^2} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_2^2}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_3^2}{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

dari kedua matriks tersebut, dapat diketahui bahwa komponen $g_{\mu\nu}$ dan $g^{\mu\nu}$ sama dengan nol ketika berlaku $\mu \neq \nu$. Kemudian diperoleh komponen-komponen matriks diagonalnya yaitu

$$g_{11} = \frac{\alpha_1}{x_1^2},\; g^{11} = \frac{x_1^2}{\alpha_1},\; g_{22} = \frac{\alpha_2}{x_2^2},\; g^{22} = \frac{x_2^2}{\alpha_2},\; g_{33} = \frac{\alpha_3}{x_3^2},\; g^{33} = \frac{x_3^2}{\alpha_3}$$

dari sini didapatkan nilai komponen dari matriks $g_{\mu\nu}$ dan $g^{\mu\nu}$ yang dapat digunakan untuk mencari nilai dari simbol Christoffel.

Nilai dari simbol Christoffel dapat diperoleh dari persamaan sebagai berikut:

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\right)$$

dengan μ, ν, κ, α = 1,2,3. Dengan memasukan nilai $g_{\mu\nu}$ dan juga $g^{\mu\nu}$, didapatkan 27 komponen simbol Christoffel, dengan 3 diantaranya tidak sama dengan nol saat $\kappa = \mu = \nu$ yaitu

$$\Gamma^1_{11} = -x_1^{-1},\ \Gamma^2_{22} = -x_2^{-1},\ \Gamma^3_{33} = -x_3^{-1}$$

Kemudian dari simbol Christoffel yang telah diketahui dapat digunakan untuk menentukan tensor kelengkungan Riemannian dan juga untuk menentukan persamaan kurva geodesik.

A. Tensor Kelengkungan Riemannian

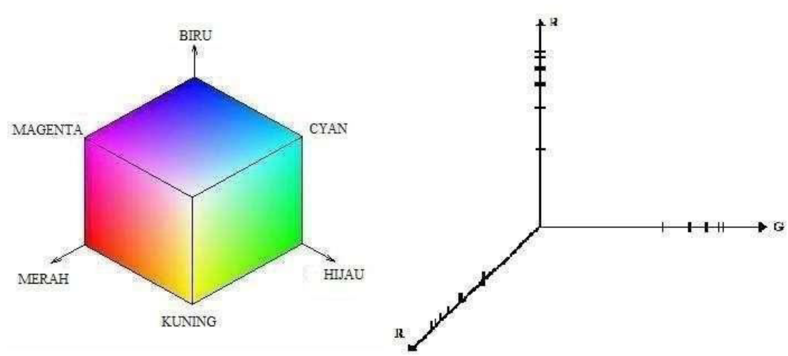
Persamaaan dari tensor kelengkungan Riemannian yaitu:

$$R^m_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^m_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^m_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^m_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^m_{\nu\eta}$$

Pada penghitungan nilai tensor kelengkungan Riemannian, $\partial_\mu\Gamma^m_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^m_{\mu\lambda} = 0$ dan $\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^m_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^m_{\nu\eta} = 0$ karena $\partial_\mu\Gamma^m_{\nu\lambda}$, $\partial_\nu\Gamma^m_{\mu\lambda}$, $\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^m_{\mu\eta}$ dan $\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^m_{\nu\eta}$ akan memiliki nilai tidak sama dengan nol saat $\kappa = \lambda = \mu = \nu$ dan oleh karena itu:

$$\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} = \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \text{ dan } \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\eta} = \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa_{\nu\eta}.$$

Maka tensor kelengkungan Riemann untuk semua komponen $R^m = 0$, dengan kelengkungan menurut tensor Riemannian berbentuk datar (*flat*). Datar yang dimaksud disini yaitu keseragaman perubahan intesitas ke arah radial, dengan ditinjau dari metrik ruang warna Resnikoff $R^+ \times R^+ \times R^+$ yang ditunjukkan oleh Gambar 1 menunjukkan bahwa pada ruang warna Resnikoff, perubahan warna yang terjadi akan sulit dibedakan oleh manusia jika semakin menjauhi titik pangkal. Hal ini yang menjadi sebab jarakantar dua titik dengan selisih yang sama tiap sumbunya mengecil secara seragam ketika menjauhi titik pangkal.



Gambar 1. Metrik ruang warna

B. Geodesik

Dalam menentukan kurva paling lurus yang memungkinkan dalam hal ini disebut geodesik, secara umum dapat menggunakan persamaan berikut:

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

dari sebelumnya diketahui,bahwa $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ jika tidak berlaku $\lambda = \mu = \nu$. Oleh karena itu, digunakan tiga simbol Christoffel yang tidak bernilai nol yaitu Γ^1_{11}, Γ^2_{22} dan Γ^3_{33} yang kemudian digunakan kedalam persamaan geodesik

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2} - \frac{1}{x_\mu}\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)^2 = 0$$

dari 3 persamaan diatas, kurva $x_1(t)$, $x_2(t)$ dan $x_3(t)$ memiliki bentuk yang serupa. Dalam menentukan komponen kurva diatas, $x_\mu(t)$ dari berbagai kemungkinan, fungsi exponential yang dapat memenuhi persamaan kurva geodesik dari model ruang warna Resnikoff

$$x_\mu(t) = A_\mu e^{k_\mu t}$$

$$\frac{d^2(A_\mu e^{k_\mu t})}{dt^2} - \frac{1}{A_\mu e^{k_\mu t}}\left(\frac{d(A_\mu e^{k_\mu t})}{dt}\right)^2 = 0$$

$$A_\mu k_\mu^2 e^{k_\mu t} - \frac{1}{A_\mu e^{k_\mu t}}\left(A_\mu^2 k_\mu^2 (e^{k_\mu t})^2\right) = 0$$

Diperoleh persamaan kurva geodesik dari ruang warna Resnikoff sebagai berikut

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (A_1 e^{k_1 t}, A_2 e^{k_2 t}, A_3 e^{k_3 t})$$

Solusi pada persamaan diatas merupakan solusi umum karena solusi ini masing-masing komponen mengandung 2 tetapan untuk persamaan diferensial orde 2.

Dalam jurnal Resnikoff, geodesik untuk suatu kasus khusus dapat berbentuk $x(\tau) = e^{\tau a}$ dengan τ sebagai parameter dan a sebagai tetapan. Kasus khusus yang dimaksud yaitu bahwa kurva tersebut berpangkal di $(1,1,1) \in P$, yaitu suatu warna putih dengan intensitas tertentu.

Persamaan kurva geodesik yang telah diperoleh dari perhitungan di atas telah sesuai dengan kasus khusus untuk kurva geodesik yang telah diberikan oleh Resnikoff dan persamaaan kurva geodesik yang didapatkan merupakan bentuk umumnya. Bentuk umum yang dimaksud adalah bahwa kurva tidak harus berpangkal di warna putih, tetapi di sembarang warna $(x_1, x_2, x_3) = (A_1, A_2, A_3)$. Selanjutnya k_1, k_2 dan k_3 dapat ditentukan oleh dua titik warna yang dilalui kurva.

Dari persamaan kurva geodesik yang telah didapatkan, akhirnya diketahui cara paling efektif dan efisien untuk "berpindah" dari satu titik warna ke titik warna yang lain, yaitu perpindahan itu sepanjang perubahan nilai parameternya (misal waktu), harus mengikuti lintasan dari kurva geodesik tersebut. Konsep efektif dan efisien dalam hal ini adalah penggunaan energi dan perubahan intensitasnya paling kecil.

Perubahan energi (terkait frekuensi dan jenis warna) di ruang warna ditentukan oleh "gerakan" yang ada pada permukaan bola (berjarak sama dari pangkal koordinat). Sementara itu perubahan intensitas ditentukan oleh "gerakan" menjauh atau mendekat (secara radial) terhadap pangkal koordinat.

SIMPULAN

Kelengkungan pada ruang warna Resnikoff pada himpunan $R^+ \times R^+ \times R^+$ ditinjau dari tensor kelengkungan Riemannian yaitu menghasilkan nilai tensor kelengkungan Riemannian $R^m_{\lambda\mu\nu} = 0$ yang memiliki arti bahwa ruang warna Resnikoff itu datar. Datar disini bermakna keseragaman perubahan intensitas warna ke arah radial.

Persamaan kurva geodesik dari ruang warna Resnikoff dalam bentuk selesaian umum yaitu:

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (A_1e^{k_1t}, A_2e^{k_2t}, A_3e^{k_3t})$$

Persamaan kurva geodesik diatas merupakan bentuk umum untuk ruang warna Resnikoff, yang dari persamaan kurva geodesik tersebut penentuan titik pangkal dapat ditentukan di sembarang warna.

DAFTAR PUSTAKA

Griffiths, David. 1999. Introduction to Electrodynamics. New Jersey: Prentice Hall.

Hirose, Akira. 2010. Fundamental of Wave Phenomena. SciTech Publishing.

Carroll, Sean M. 1997. Lecture Notes on General Relativity. California: Santa Barbara.

Lee, John M. 1997. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. New York: Springer-Verlag

Macpherson dan Brown. 2021. Introduction to the Philosophy of Colour. The Routledge Handbook of Philosophy of Colour, Oxford.

Nakahara, Mikio. 2003. Geometry, Topology and Physics. London: Institute of Physics Publishing

Rosyid, Muhammad Farchani, 2013, Aljabar Abstrak Dalam Fisika. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press

Walker, Resnick dan Halliday. 2007. Fundamentals of Physics. 10^{th} edition.

Wiley, USA.

Berthier dan Provenzi. 2019. When Geometry Meets Psycho-Physics and Quantum Mechanics: Modern Perspectives on the Space of Perceived Colors. France: 4th conference on Geometric Science of Information.

Berthier dan Edoardo. 2022. Quantum Measurement and Color Perception: Theory and Applications. France

Hubel, David H. 2017. Eye, Brian and Vision. the E-Pub version, Phoenix, USA.

Ibraheem, Hasan, Khan dan Mishra.2012. Understanding Color Model: A Review.

India: Aligarh Muslim University

Provenzi, Edoardo. 2017. Principal Fiber Bundles and Geometry of Color Space. Universite Paris Descartes.

Resnikoff, H.L. 1974. Differential Geometry and Color perception. Journal of Mathematical Biology 1, 97-131.

Siberstein, Ludwik, 1946, Notes on W. S. Stiles' Paper Entitled, "A Modified Helmholtz Line-Element in Brightness-Colour Space". Journal of the Optical Society of America.

Vandergriff, Linda J. 2018. Nature and Properties of Light. Photonics System Engineering Science Applications, International Corporation McLean, Virginia.