**PROCEEDING SEMINAR NASIONAL IPA XV**
Peran Ilmu Lingkungan untuk Kecermelangan Pendidikan Sains Menuju Indonesia Emas
**Edisi 2025 | ISSN: 2962-2905**

# METODE MONTE CARLO SEBAGAI SOLUSI BERBASIS KETIDAKPASTIAN DALAM BERBAGAI MULTIDISIPLIN

**Abdullah Hanif Al Azzam[1], Nisa Istiqomah Sabdaningrum[1], Amanda Alya Kamilla[1], Yulianto Agung Rezeki[1]***

[1]Universitas Sebelas Maret, Surakarta
*Email korespondensi: yarezeki@staff.uns.ac.id

## ABSTRAK

Metode Monte Carlo adalah salah satu teknik komputasi yang digunakan dalam berbagai bidang ilmu, termasuk fisika statistika. Dalam fisika statistika, metode Monte Carlo memiliki peran penting dalam memahami dan menganalisis sistem-sistem fisika yang melibatkan banyak partikel atau variabel acak. Metode Monte Carlo menjadi semakin penting di dunia saat ini, di mana kompleksitas data dan model semakin meningkat. Tulisan ini bertujuan untuk menjelaskan prinsip dasar, aplikasi, keunggulan dan peluang masa depan metode monte carlo. Metode yang digunakan ialah studi literatur. Metode Monte Carlo, sering digunakan untuk menyebarkan ketidakpastian, menghasilkan beberapa sampel dari variabel acak input sesuai dengan distribusi probabilitasnya. Aplikasi metode ini dapat diterapkan di bidang penentuan dosis sinar x, estimasi biaya proyek, prediksi jumlah penumpang. Hal ini menjadikan metode monte carlo masih sangat diperlukan bagi berbagai ilmu di masa depan.

**Kata kunci**: Monte Carlo, Fisika Statistika, Probabilitas, Ketidakpastian

## PENDAHULUAN

Metode Monte Carlo adalah salah satu teknik komputasi yang digunakan dalam berbagai bidang ilmu, termasuk fisika statistika (Mufida & Karo, 2024). Metode ini pertama kali dikembangkan selama Perang Dunia II untuk membantu dalam pengembangan bom atom (Istiqomah & Yulianto, 2024). Nama "Monte Carlo" sendiri diambil dari nama kota di Monako yang terkenal dengan kasino-kasino mewahnya, menggambarkan sifat acak dan kebetulan yang melekat pada metode ini (Alexander Finkler, 2023). Metode Monte Carlo digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang sulit atau tidak dapat dipecahkan secara analitik dengan menggunakan simulasi acak (Di Maio et al., 2023; Zio, 2013). Dengan memanfaatkan komputasi modern, metode ini telah menjadi alat yang sangat berguna dalam menyelesaikan berbagai masalah kompleks dalam fisika statistika, termasuk dalam memodelkan perilaku sistem fisika yang kompleks dan dalam melakukan integrasi numerik (Luengo et al., 2020).

Dalam fisika statistika, metode Monte Carlo memiliki peran penting dalam memahami dan menganalisis sistem-sistem fisika yang melibatkan banyak partikel atau variabel acak (Ohno et al., 2018). Salah satu aplikasi utama metode ini adalah dalam memodelkan sistem-sistem yang mengikuti hukum probabilitas dan mekanika statistika, seperti sistem gas ideal, model Ising dalam teori magnetisme, serta sistem partikel yang saling berinteraksi (Boleininger et al., 2020; Cimini et al., 2019; Khelfaoui & Babahani, 2019). Metode Monte Carlo memungkinkan para ilmuwan untuk melakukan simulasi numerik yang memungkinkan mereka untuk memahami perilaku sistem-sistem fisika yang kompleks (Mavrantzas, 2021). Dengan menggunakan teknik ini, para peneliti dapat menghasilkan data yang mewakili distribusi probabilitas dari berbagai variabel fisika, memperkirakan nilai ekspektasi dari berbagai besaran fisika, dan mengidentifikasi perilaku kritis dari sistem-sistem fisika. Selain itu, metode Monte Carlo juga digunakan dalam memecahkan berbagai masalah integrasi numerik dalam fisika statistika, seperti menghitung integral-impropria yang sulit atau tidak dapat dipecahkan secara analitik (Ďuriš, 2020). Dengan memanfaatkan sifat acak dan kebetulan dari metode Monte Carlo, para ilmuwan dapat mengestimasi integral-integral yang sulit dengan tingkat akurasi yang tinggi.

Metode Monte Carlo menjadi semakin penting di dunia saat ini, di mana kompleksitas data dan model semakin meningkat. Metode ini memungkinkan untuk menangani ketidakpastian dan variasi dalam model dengan menggunakan teknik simulasi untuk menghasilkan estimasi numerik (Zhang, 2021). Metode Monte Carlo telah menjadi alat penting untuk pengambilan keputusan, perencanaan risiko, dan optimisasi sistem yang kompleks karena dapat menangani masalah yang sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan dengan metode analitis konvensional.

Metode Monte Carlo telah muncul sebagai solusi untuk mengatasi masalah multidisiplin di era yang penuh dengan ketidakpastian dan kompleksitas (Zhang, 2021). Dengan landasan teori probabilitas dan konsep statistika yang kuat, metode Monte Carlo telah menjadi alat yang efektif untuk memodelkan dan menganalisis sistem-sistem kompleks dalam berbagai disiplin ilmu. Berdasarkan latar belakang tersebut, artikel ini bertujuan meninjau potensi metode Monte Carlo sebagai pendekatan berbasis ketidakpastian yang dapat diandalkan, dan menekankan peran pentingnya dalam menyediakan solusi numerik yang akurat untuk masalah kompleks di dunia modern.

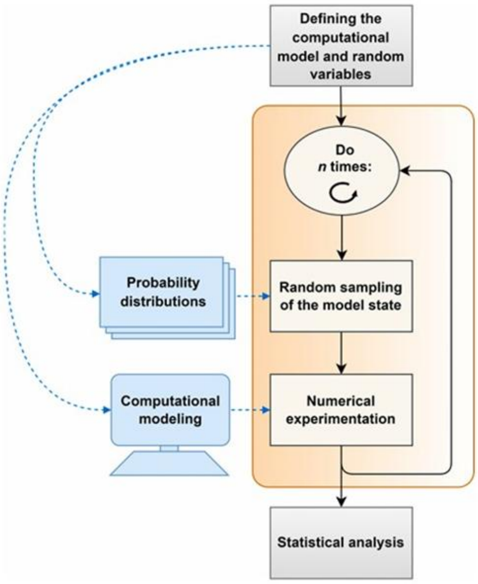
## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Prinsip Dasar Metode Monte Carlo

## A. Konsep Dasar dan Prinsip Kerja Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo adalah produksi proses atau objek acak yang dihasilkan oleh komputer. Entitas-entitas ini dapat muncul secara "alami" ketika mensimulasikan sistem dunia nyata, seperti pergerakan neutron, jaringan jalan yang kompleks, atau perkembangan pasar saham. Namun, untuk menyelesaikan masalah yang sepenuhnya deterministik, objek-objek acak dalam teknik Monte Carlo sering kali diperkenalkan secara "artifisial." Dalam konteks ini, metode Monte Carlo hanya melibatkan pengambilan sampel acak dari distribusi probabilitas tertentu. Tujuan penggunaan teknik Monte Carlo, baik dalam lingkungan alami maupun artifisial, adalah untuk mengulangi suatu eksperimen berkali-kali (atau menggunakan simulasi yang cukup panjang) guna memperoleh berbagai kuantitas yang diinginkan dengan menerapkan Law of Large Numbers dan teknik inferensi statistik lainnya (Kroese et al., 2014).

Gambar 1 menunjukkan flowchart sederhana dari MCM. Langkah-langkah utamanya meliputi: pertama, mendefinisikan model komputasi dan distribusi probabilitas dari variabel acak. Model yang dikembangkan harus menjadi representasi valid dari sistem yang dipelajari untuk menjamin hasil simulasi yang andal. Selanjutnya, untuk setiap iterasi, keadaan model diambil secara acak dan perilaku model dievaluasi secara numerik. Akhirnya, hasil dari setiap iterasi diproses untuk mendapatkan statistik model dan kinerja yang diharapkan (Abud et al., 2023).




Gambar 1. Flowchart Metode Monte Carlo

Melalui MCM, dapat dilakukan perhitungan indeks kinerja untuk menilai model komputasi dengan mempertimbangkan ketidakpastian. Simulasi stokastik memungkinkan evaluasi berbagai karakteristik dari indikator ini seperti rata-rata, varians, probabilitas, interval kepercayaan, kesalahan relatif, dan sebagainya. Misalnya, jika seseorang ingin menghitung suatu indikator generik ℓ melalui (1):

$$\ell = E[H(X)] = \int H(x)f(x)dx \qquad (1)$$

di mana $X$ adalah variabel acak dengan fungsi densitas probabilitas (PDF) $f$, $H(x)$ adalah fungsi riil generik yang disebut indikator kinerja, dan E[H(X)] adalah ekspektasi dari $H(x)$ terhadap variabel acak $X$. Kemudian, estimasi $\ell$ diperoleh menggunakan Metode Monte Carlo (MCM) dengan menghitung rata-rata sampel menggunakan persamaan (2):

$$\hat{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(X_i) \qquad (2)$$

di mana $X_1, X_2, ... X_n$ adalah sampel acak dari $X$ yang diambil dari PDF $f$, dan $n$ adalah ukuran sampel.

Estimator $\hat{\ell}$ dianggap tidak bias karena $E[\hat{\ell}] = \ell$. Selain itu, $\hat{\ell}$ cenderung mendekati $\ell$ untuk nilai $n$ yang cukup besar berdasarkan Law of Large Numbers (Rubinstein & Kroese, 2017). Penelitian relevan lainnya terkait teorema limit sentral menjamin bahwa untuk nilai n yang besar, l^memiliki PDF yang mendekati distribusi normal meskipun H(X) tidak memiliki PDF yang normal.

Estimator penting lainnya adalah varians sampel $S^2$ yang cenderung menuju varians teoretis $\sigma^2$ untuk nilai $n$ yang cukup besar, sesuai dengan teori *Law of Large Numbers*. Persamaan (3) mempresentasikan perhitungan varians sampel yang mengacu pada estimator $\hat{\ell}$. Setelah varians tersebut diketahui, sebuah indikator seperti interval kepercayaan dan kesalahan relatif dapat diukur sehingga memungkinkan analisis terhadap konvergensi metode Monte Carlo dan akurasi dari estimator tersebut.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (H(X_i - \hat{l}))^2 \quad (3)$$

**B. Macam-Macam Metode Monte Carlo**

Pendekatan sederhana yang telah dijelaskan sebelumnya sering dikenal sebagai integrasi Monte Carlo karena kegunaannya dalam masalah integrasi. Metode ini memanfaatkan pengambilan sampel acak untuk memperkirakan nilai integral yang sulit atau tidak mungkin dihitung secara analitis. Algoritma dasar ini dapat disusun dengan lebih efisien untuk menghasilkan estimator yang lebih andal dan mengurangi usaha komputasi. Selain aplikasi dasar ini, MCM mencakup berbagai algoritma simulasi yang bergantung pada pengambilan sampel acak. Beberapa kemajuan atau variasi MCM, antara lain:

**1. Importance Sampling (IS)**

Importance Sampling (IS) adalah teknik yang sangat umum digunakan untuk mengurangi variansi dan sangat berguna dalam simulasi kejadian langka dengan probabilitas rendah terjadi. Prinsip dasarnya adalah dengan memprioritaskan kejadian penting melalui pengubahan fungsi distribusi probabilitas (PDF) untuk pengambilan sampel, kemudian menyesuaikan rata-rata sampel agar sesuai dengan yang diperoleh menggunakan PDF asli. Meskipun sangat efektif (dapat mengurangi variansi hingga jutaan kali dalam kasus kejadian langka), penerapan IS lebih kompleks dibandingkan dengan teknik pengurangan variansi lainnya (Smith et al., 1997).

Menentukan PDF yang tepat untuk pengambilan sampel, yang menghasilkan variansi paling kecil jika digunakan sebagai sampel menggantikan distribusi asli, dapat diformulasikan sebagai masalah optimasi dengan tujuan meminimumkan variansi. Salah satu teknik yang sering digunakan untuk mengatasi masalah ini adalah metode Cross Entropy (CE) (Rubinstein & Kroese, 2017). Dalam Silva dan Castro (2019), IS dengan CE digunakan untuk menghitung probabilitas kelebihan beban jalur dan tegangan rendah pada bus di jaringan uji IEEE. Selain CE, Adaptive Importance Sampling (AIS) dan Sequential Importance Sampling (SIS) juga menjadi variasi IS yang penting (Zakaria et al., 2020).

**2. Monte Carlo Markov Chain (MCMC)**

Metode MCMC adalah teknik sampling yang menggabungkan konsep Monte Carlo dan rantai Markov. MCMC sering digunakan dalam inferensi Bayesian karena memungkinkan untuk memperkirakan distribusi posterior yang sulit dihitung secara analitik (van Ravenzwaaij et al., 2018). Menurut Zakaria et al. (Zakaria et al., 2020), beberapa algoritma utama MCMC antara lain Metropolis-Hastings, Gibbs sampling, dan Differential Evolution. Metropolis-Hastings sederhana dan efektif, tetapi tidak disarankan jika parameter sangat berkorelasi kuat. Sebaliknya, Gibbs sampling lebih cocok untuk merepresentasikan korelasi dalam masalah multivariat dengan mengambil sampel dari distribusi kondisional. Namun, efisiensi komputasi Gibbs sampling dapat ditingkatkan dengan menggunakan beberapa rantai, seperti dalam algoritma Differential Evolution. (Rubinstein & Kroese, 2017)

3. **Quasi-Monte Carlo (QMC)**

Metode QMC adalah variasi deterministik dari MCM (Bayousef & Mascagni, 2019). Ini berarti bahwa QMC menggunakan algoritma dasar yang sama dengan MCM, tetapi memanfaatkan urutan deterministik dengan ketidakcocokan rendah (atau urutan kuasi-acak) daripada pengambilan sampel semu-acak (Howell & Daun, 2021). Urutan dengan ketidakcocokan rendah digunakan untuk mencakup domain pengambilan sampel dengan lebih merata, menghasilkan sampel yang lebih ekuidistan. Hal ini memungkinkan QMC untuk memiliki akurasi yang lebih tinggi dan tingkat konvergensi yang lebih cepat dibandingkan dengan MCM (Singhee & Rutenbar, 2010). Namun, QMC mungkin memiliki performa yang kurang optimal dalam situasi dengan dimensi tinggi

4. **Sequential Monte Carlo**

SMC, atau dikenal juga sebagai metode partikel, dapat merepresentasikan ketergantungan temporal dan kronologis dari keadaan sistem (Bhadra & Ionides, 2016). Hal ini berbeda dengan Metode Monte Carlo Non-Sekuensial (NSMC) tradisional yang juga disebut pendekatan pengambilan sampel keadaan (Zhao et al., 2017). Menurut Doucet et al.(2001), SMC menawarkan prosedur simulasi yang fleksibel untuk menghitung distribusi posterior, yang dapat menangani model berdimensi tinggi, non-linear, dan non-Gaussian. Metode ini sangat berguna untuk mempertimbangkan waktu gangguan, kegagalan, dan perbaikan komponen EPS selama periode layanan dalam studi keandalan. Salah satu peningkatan populer dari SMC yaitu Pseudo-Sequential Monte Carlo (PSMC) yang lebih mudah diterapkan dan lebih cepat daripada SMC konvensional (Yu et al., 2015). PSMC menggunakan pengambilan sampel non-sekuensial dari keadaan sistem dan hanya mensimulasikan sub-sekuensi yang terkait dengan keadaan gagal.

**Aplikasi Metode Monte Carlo dalam Berbagai Bidang**

**A. Penentuan Dosis Sinar X**

Radiasi telah lama menjadi pilihan pengobatan untuk berbagai penyakit. Penting untuk memastikan bahwa dosis radiasi yang diberi ke jaringan tubuh terdistribusikan dengan merata dan homogen (Baines et al., 2018). Hal ini penting karena bahkan perubahan dosis radiasi sebesar 5% dapat signifikan mengubah kemungkinan kontrol tumor (sekitar 10-20%) dan tingkat komplikasi jaringan normal (sekitar 20-30%) (Brahme, 2023). Selanjutnya, untuk memastikan dosis radiasi yang diberi tepat dan efektif dalam mengobati tumor tanpa merusak jaringan sehat, penting untuk mengurangi ketidakpastian dosis dengan menerapkan koreksi untuk inhomogenitas jaringan. Perhitungan dosis biasa dilakukan dengan menganggap bahwa jaringan di dalam tubuh adalah sama, atau homogen. Namun, sebenarnya jaringan memiliki perbedaan-perbedaan kepadatan yang dapat memengaruhi bagaimana dosis radiasi didistribusikan di dalamnya. Oleh karena itu, perlu dilakukan koreksi untuk mengatasi perbedaan ini agar perhitungan dosis radiasi menjadi lebih akurat. Faktor koreksi ini disebut sebagai Indeks Koreksi Ketidakhomogenan (ICF) jaringan yang dituliskan:

$$ICF=\frac{D_{nh}}{D_h} \quad (4)$$

Dh merupakan dosis pada medium homogenan dan Dnh diartikan sebagai dosis dalam medium nonhomogen.

Salah satu metode yang dipakai untuk mengukur dosis radiasi dengan akurat adalah metode Monte Carlo (Shi et al., 2020). Salah satu software yang sering dipakai untuk ini adalah EGS, yang kini telah diperbarui menjadi EGSnrc. Alasan pemilihan software ini adalah karena fitur-fiturnya yang memungkinkan simulasi transport partikel geometri pada treatment head radiation menggunakan BEAMnrc, serta fitur pemodelan elemen dalam tiga dimensi menggunakan DOSXYZnrc. Kelebihan dari software EGS yang berbasis metode Monte Carlo adalah kemampuannya untuk mengatasi berbagai proses fisika dalam distribusi dosis dengan akurat. Hal ini dicapai dengan memanfaatkan cross section sebagai fungsi probabilitas, sehingga memungkinkan untuk melakukan simulasi dengan presisi yang tinggi.

Informasi tentang foton dalam simulasi foton menggunakan metode Monte Carlo disimpan dalam suatu tempat yang disebut stack. Informasi ini mencakup arah gerak, posisi, dan energi foton. Setiap langkah pergerakan foton dari satu posisi ke posisi selanjutnya disebut sebagai step. Setelah foton melakukan satu langkah, informasi dalam stack diperbarui. Setiap langkah pergerakan foton, jarak yang ditempuh foton sebelum mengalami interaksi berikutnya dihitung. Jarak ini dihitung secara acak. Probabilitas jarak yang akan ditempuh foton sebelum interaksi berikutnya terjadi diberikan oleh suatu persamaan.

$$x=-\frac{1}{\sigma_T\ (E)}\ln(\xi) \qquad (5)$$

$\sigma_T\ (E)$ adalah cross section total dan $\xi$ adalah bilangan acak yang nilainya bervariasi antara 0 hingga 1.

Setelah satu step ditempuh, ditentukan interaksi yang terjadi antara efek fotolistrik, compton effect, produksi pasangan atau hampuran Rayleigh secara acak melalui persamaan:

$$f(i)=\frac{\sum_{j=1}^{i}\sigma_j}{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j}, \qquad n\geq i \qquad (6)$$

Dalam konteks ini, n adalah jumlah total interaksi yang terjadi pada foton. Sedangkan i adalah bilangan bulat yang digunakan untuk menunjukkan angka interaksi tertentu, misalnya 1 untuk efek foto listrik, 2 untuk produksi pasangan, 3 untuk efek Compton, dan 4 untuk hamburan Rayleigh. $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j$ adalah total dari semua cross section (σ) untuk semua jenis interaksi (j) pada foton hingga interaksi ke-n.

Setelah itu, digunakan bilangan acak untuk memutuskan jenis interaksi yang akan terjadi. Setelah jenis interaksi dipilih, langkah berikutnya adalah memilih sudut dan energi baru untuk photon tersebut. Proses pemilihan energi dan sudut juga bersifat acak, dan probabilitasnya dipengaruhi oleh energi awal foton dan medium yang dilaluinya.

$$f(i-1)<\xi<f(i) \qquad (7)$$

Setiap kali terjadi interaksi, ada kemungkinan terbentuknya partikel baru. Jika partikel baru terbentuk, informasi mengenai posisi, arah, dan energi partikel baru tersebut akan ditambahkan ke dalam daftar informasi yang sedang diproses.

Pada penelitian yang dilakukan Rizani (2012), penelitian dilakukan dengan menggunakan paket program EGSnrc, khususnya BEAMnrc dan DOSXYZnrc, untuk simulasi sinar-X dari akselerator Linac Elekta. Geometri dan bahan Linac diambil dari manual Elekta Oncology Systems dan studi sebelumnya. Hasil simulasi diproses untuk menghitung dosis radiasi pada fantom berukuran 40 x 40 x 40 cm³. Sebelumnya, dilakukan validasi simulasi dengan pengukuran langsung oleh BATAN pada Linac Elekta di RSUP dr. Sardjito Yogyakarta. Selanjutnya, simulasi dilakukan pada fantom tubuh manusia dengan variasi jaringan lunak, tulang, dan paru-paru. Fantom nonhomogen dibuat melalui penyisipan paru-paru atau tulang setebal 10 cm dalam jaringan lunak.

Hasil simulasi menunjukkan grafik PDD (Percentage Depth Dose) yang menggambarkan distribusi dosis di air dan berbagai jenis jaringan tubuh manusia seperti jaringan yang lunak, paru-paru, dan tulang di fantom homogen dan nonhomogen. Pengujian keakuratan simulasi Monte Carlo dilihat dari grafik PDD dari simulasi dibandingkan dengan data pengukuran. Hasil perbandingan menunjukkan bahwa perbedaan dosis antara hasil simulasi dan pengukuran di bawah 3% hingga kedalaman 20 cm, dan di bawah 5% pada kedalaman lebih dari 20 cm, menunjukkan bahwa model yang dipakai dalam simulasi ini valid.

Selanjutnya, simulasi dilakukan untuk menentukan karakteristik dosis pada jaringan lunak. Hasilnya menunjukkan bahwa dosis pada jaringan lunak memiliki pola yang sama dengan dosis pada air, dengan perbedaan dosis relatif di bawah 3%. Hal ini menunjukkan bahwa jaringan lunak memiliki karakteristik dosis yang mirip dengan air. Namun, penambahan medium nonhomogen seperti paru-paru dan tulang pada tubuh manusia mempengaruhi distribusi dosis. Penambahan paru-paru menyebabkan peningkatan dosis pada daerah sebelum paru-paru dan penurunan dosis pada daerah setelah paru-paru. Sementara itu, penambahan tulang menyebabkan penurunan dosis pada seluruh daerah. Faktor koreksi yang diperlukan akibat adanya paru-paru setebal 10 cm di dalam jaringan lunak berkisar antara 1,00 hingga 1,27, sedangkan untuk tulang berkisar antara 0,81 hingga 1,05 pada sinar-X 6 MV.

## B. Estimasi Biaya Proyek

Manajemen proyek adalah cara mengatur proyek agar berjalan lancar dan efisien. Salah satu cara untuk memperkirakan risiko dalam manajemen proyek adalah dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Metode ini sudah lama digunakan dalam matematika dan sains, dan disebutkan dalam panduan manajemen proyek. Pemanfaatan simulasi monte carlo dalam manajemen proyek dilakukan untuk memprediksi biaya yang akan dikeluarkan serta durasi pengerjaan dari suatu proyek dengan menggunaan data dari biaya serta durasi secara acak dari distribusi probabilitas yang mungkin terjadi. Sehingga total biaya dan total waktu yang diperlukan suatu proyek dapat ditentukan.

Berdasarkan tulisan Restiana (2022), prosses estimasi biaya proyek menggunakan simulasi Monte Carlo dilakukan melalui microsoft excel. Langkah awal simulasi dilakukan desain simulasi. Desain simulasi ini digunakan untuk memperkirakan biaya total suatu proyek dengan lebih akurat. Dengan mengambil contoh proyek yang terdiri dari enam aktivitas dan mengasumsikan distribusi seragam untuk biaya setiap aktivitas, simulasi ini membantu dalam menentukan seberapa besar biaya total proyek tersebut bisa menjadi, sehingga manajer proyek dapat membuat perkiraan yang lebih baik untuk anggaran proyek (Sadek, 2021). Salah satu simulasi dilakukan pada penelitian Fadjar (2008), dimana angka acak yang digunakan di simulasi dapat dihasilkan dengan menjadikan $U_0, b, c$ dan $m$ sebagai parameter dan rumusnya dapat dituliskan:

$$u_n = (bu_{n-1} + c)mod(m), \quad n = 1,2, \ldots$$
$$R_n = \frac{u_n}{m}, \quad n = 1,2, \ldots. \qquad (8)$$

Meskipun angka yang dihasilkan sebenarnya bukan angka acak sejati, tetapi digunakan untuk tujuan praktis. Dalam tulisan ini, angka acak dihasilkan dengan menggunakan fungsi RAND pada Microsoft Excel. Dengan menggunakan rumus tertentu, maka dapat diperoleh perkiraan biaya total proyek dengan menjumlahkan biaya dari semua aktivitas. Selanjutnya adalah penentuan nilai iterasi.

Metode Monte Carlo digunakan untuk memprediksi kesalahan dari simulasi, yang berbanding lurus dengan jumlah iterasi yang dilakukan. Kesalahan total dihitung dengan rumus di bawah berdasarkan deviasi standar $\sigma$ dan jumlah iterasi N.

$$\varepsilon = \frac{3\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (9)$$

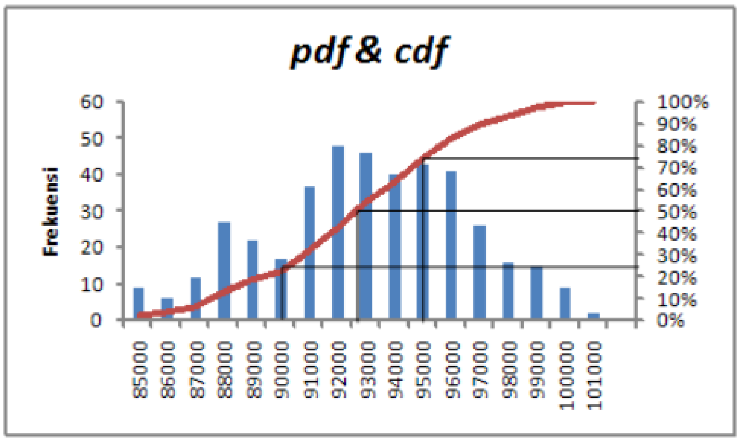
Dalam simulasi yang dilakukan Fadjar (Fadjar, 2008), terdapat dua anggota populasi, yaitu nilai minimum dan maksimum biaya proyek. Deviasi standar dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$\sigma = \sqrt{\sum \frac{(x - \bar{x})^2}{N}} \qquad (10)$$

Lebih lanjut, agar kesalahan absolut kurang dari 2%, maka dapat menggunakan rumus di bawah:

$$\varepsilon = \frac{\bar{x}}{\left(\frac{1}{0,02}\right)} \qquad (11)$$

Sementara untuk menentukan jumlah iterasi yang diinginkan untuk memperoleh hasil dengan error kurang dari 2% dapat menggunakan rumus $N = \left(\frac{3\times\sigma}{\varepsilon}\right)^2$ yang kemudian didapatkan jumlah iterasi sebanyak 416.




Gambar 2. Grafik PDF dan CDF hasil analisis Monte Carlo

Setelah dilakukan 416 iterasi, hasil analisis Monte Carlo menunjukkan bahwa deviasi standar populasi dari hasil simulasi adalah 3.530.000, dengan error sebenarnya sebesar 519.000. Meskipun random variabel biaya total terdistribusi normal, mediannya tidak jauh berbeda dengan rata-rata, hanya 0,22%. Akurasi simulasi ini cukup tinggi, dengan error sebesar 0,56%. Distribusi hasil simulasi menunjukkan Kurtosis -0,437, menandakan bahwa kurva distribusi lebih rata dibanding distribusi normal. Skewness -0,199 menunjukkan bahwa ekor dari kurva distribusi lebih condong ke arah kiri. Dari cumulative distribution function pada gambar 2, dapat diketahui probabilitas keberhasilan proyek dengan berbagai anggaran, misalnya untuk probabilitas 50% diperlukan anggaran sekitar Rp. 93 juta.

## C. Prediksi Jumlah Penumpang

Perkeretaapian berperan sebagai tulang punggung angkutan barang dan penumpang perkotaan, serta penggerak ekonomi nasional. Integrasi transportasi perkeretaapian dengan moda lain diharapkan meningkatkan efisiensi ekonomi. Keunggulan perkeretaapian meliputi kapasitas angkut besar, kecepatan, keamanan, efisiensi energi, ramah lingkungan, dan kebutuhan lahan yang relatif sedikit. Dalam konteks ini, metode monte carlo dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penumpang penjualan yang akan membantu dalam menyusun strategi manajemen yang lebih efektif. Berdasarkan tulisan Muhazir, A. (2022), tahapan yang perlu dilakukan untuk mengatasi masalah menggunakan simulasi monte carlo dapat dilihat pada gambar di bawah:


Gambar 3. Tahapan Simulasi Monte Carlo

Data jumlah penumpang PT KAI memakai data tahunan untuk wilayah Sumatera yang diolah pada tahun 2017, 2018, dan 2019. Selanjutnya dalam menentukan distribusi probabilitas dapat dilakukan dengan persamaan berikut:

$$PJR = \frac{FR}{DC} \qquad (12)$$

Dimana PJR ialah distribisu probabilitas, FR adalah frekuensi dan DC adalah total frekuensi. Penjumlahan nilai distribusi probabilitas dengan nilai sebelumnya dilakukan untuk mendapatkan distribusi probabilitas kumulatif. Selanjutnya, interval angka acak dibentuk berdasarkan nilai distribusi probabilitas kumulatif yang sudah didapatkan. Lebih lanjut untuk membangkitkan angka acak dapat menggunakan metode Mixed Congruent Method dengan rumus berikut:

$$Ji + 1 = (y \times Ji + z)mod \qquad (13)$$

Persamaan tersebut adalah bagian dari metode Monte Carlo untuk menghasilkan bilangan acak dalam rentang tertentu. Di sini, terdapat suatu urutan bilangan acak Ji, dimana Ji+1 adalah bilangan acak ke-i dari urutan ini. Lebih lanjut, untuk menghasilkan Ji+1 dapat dilakukan dengan mengalikan Ji dengan konstanta y, kemudian menambahkan konstanta z. Selanjutnya, sisa pembagian (modulus) diambil dari hasil tersebut dengan suatu bilangan m (batasan bilangan acak) untuk memastikan bahwa Ji+1 tetap dalam rentang bilangan acak yang diinginkan. Dengan menggunakan persamaan ini secara berulang, dapat dihasilkan deret bilangan acak yang dapat digunakan dalam simulasi Monte Carlo.

Dari hasil dan pembahasan dengan menggunakan persamaan tingkat akurasi dengan persamaan di bawah:

$$TA = \frac{TDR}{TDT} \times 100\% \qquad (14)$$

Dengan TA adalah tingkat akurasi, TDR ialah total data terendah, dan TDT adalah total data tertinggi. Lebih lanjut, dapat disimpulkan bahwa metode Monte Carlo dapat memprediksi jumlah penumpang dengan tingkat keakuratan yang tinggi. Tingkat keakuratan prediksi untuk tahun 2018, 2019, dan 2020 berturut-turut adalah 99,44%, 98,07%, dan 98,49%. Hal ini menunjukkan bahwa metode Monte Carlo dapat memberikan perkiraan jumlah penumpang yang sangat dekat dengan jumlah sebenarnya. Dengan tingkat keakuratan yang tinggi ini, PT.KAI dapat lebih mudah mengambil keputusan terkait penambahan atau pengurangan gerbong kereta api untuk masa mendatang. Metode Monte Carlo membantu PT.KAI untuk mengantisipasi kebutuhan transportasi dan mengoptimalkan layanan mereka.

**Keunggulan dan Kekurangan Metode Monte Carlo**

Metode Monte Carlo banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang dengan beragam kelebihan. Namun, seperti halnya dengan banyak teknik, metode ini juga memiliki beberapa kekurangan. Kelebihan dan kekurangan Metode Monte Carlo dijabarkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Kelebihan dan Kekurangan Metode Monte Carlo

| Kelebihan | Kekurangan |
|---|---|
| 1. Metode ini dapat diterapkan pada berbagai jenis masalah matematis dan statistik, termasuk yang kompleks dan tidak terstruktur<br>2. Tidak terbatas pada distribusi tertentu, sehingga dapat digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena yang melibatkan ketidakpastian<br>3. Metode ini dapat memberikan estimasi yang sangat akurat untuk nilai yang diinginkan, terutama dalam memecahkan masalah integral atau menghitung nilai harapan<br>4. Dapat digunakan untuk menangani masalah yang sulit secara analitis atau komputasional, dan seringkali memberikan solusi yang lebih cepat daripada metode tradisional.<br>5. Konsep dasarnya relatif sederhana dan mudah dipahami. | 1. Metode Monte Carlo seringkali melibatkan pembuatan ribuan atau jutaan simulasi untuk mendapatkan hasil yang akurat, memakan waktu komputasi yang cukup lama, terutama untuk data set yang besar atau model yang kompleks.<br>2. Keakuratan hasil dari Metode Monte Carlo sangat bergantung pada kualitas dari sampel acak yang digunakan |

**Peluang Masa Depan**

Monte Carlo merupakan metode yang digunakan untuk memprediksi hasil dari suatu kejadian dengan cara melakukan simulasi secara acak berulang-ulang. Teknik ini berguna dalam berbagai bidang, terutama dalam komputasi paralel, analisis kesalahan non-asimtotik, pengembangan algoritma adaptif, simulasi proses spasial, dan penanganan peristiwa langka.

**A. Komputasi Paralel**

Metode Monte Carlo awalnya diciptakan untuk digunakan pada komputer dengan satu prosesor yang kuat. Namun, seiring dengan perkembangan teknologi, komputer kini menggunakan banyak prosesor yang bekerja bersama secara paralel untuk meningkatkan kinerjanya. Algoritma simulasi Monte Carlo paralel yang dikembangkan secara efisien mengevaluasi keandalan dan biaya peralatan serta sistem, dibandingkan dengan pendekatan analitis tradisional (Kouis et al., 2019). Teknik Monte Carlo yang dikembangkan untuk digunakan secara paralel membantu dalam menghitung keandalan dan biaya suatu sistem atau peralatan dengan lebih efisien. Meskipun banyak teknik Monte Carlo bisa diadaptasi untuk digunakan secara paralel, ada juga teknik yang memerlukan penyesuaian khusus untuk dapat berjalan di komputer dengan banyak prosesor. Saat ini, penelitian masih sedikit yang dilakukan untuk mengembangkan teknik Monte Carlo yang dapat bekerja dengan baik di lingkungan komputasi paralel. Salah satu masalahnya adalah dalam menghasilkan angka acak yang diperlukan untuk komputasi paralel dengan efisien. Oleh karena itu, pengembangan lebih lanjut dalam teknik Monte Carlo untuk komputasi paralel menjadi hal yang penting untuk masa depan komputasi yang lebih cepat dan efisien.

**B. Analisis Kesalahan Nonasimtotik**

Analisis tradisional tentang metode Monte Carlo biasanya melibatkan situasi ideal di mana terdapat banyak data atau parameter ekstrim (Tang, 2022). Analisis semacam itu membantu mengurangi kesalahan dalam penggunaan metode Monte Carlo, terutama dalam konteks analisis keuangan (Hu et al., 2022). Namun dalam praktiknya, metode ini sering digunakan dalam situasi yang tidak ideal, yang berbeda dari asumsi ideal tersebut (Clémençon & Portier, 2018). Hal ini menyebabkan analisis tradisional seringkali tidak sesuai dengan kinerja sebenarnya dari metode Monte Carlo dalam situasi dunia nyata. Meskipun telah ada beberapa upaya untuk memahami bagaimana metode ini berkinerja dalam situasi yang lebih umum dan realistis, masih banyak pekerjaan yang perlu dilakukan untuk lebih memahami cara terbaik menggunakan metode Monte Carlo dalam kasus nyata.

**C. Algoritma Monte Carlo Adaptif**

Banyak algoritma Monte Carlo bersifat adaptif, artinya mereka dapat menyesuaikan perilakunya berdasarkan hasil acak yang dihasilkan. Contohnya adalah algoritma genetika dan metode entropy silang. Metode Monte Carlo adaptif ini dapat meningkatkan analisis Bayesian dengan memilih algoritma terbaik berdasarkan sampel dan informasi yang tersedia (Simola et al., 2019). Algoritma Markov Chain Monte Carlo (MCMC) adaptif dapat menghasilkan proses acak yang stabil dan mengoptimalkan parameter yang digunakan. Algoritma ini sangat baik dalam menyelesaikan masalah optimasi dan estimasi yang kompleks (Atchadé & Rosenthal, 2005). Namun, memahami bagaimana estimator ini bekerja secara teori seringkali sulit atau bahkan tidak mungkin dengan alat matematika yang ada saat ini. Meskipun sudah ada beberapa kemajuan, masih banyak masalah yang belum terpecahkan dalam bidang ini.

**D. Peningkatan Simulasi Proses Spasial**

Salah satu area simulasi Monte Carlo yang masih belum banyak dikembangkan adalah simulasi proses spasial, yaitu proses yang terjadi dalam ruang tiga dimensi. Banyak proses spasial tidak memiliki sifat-sifat seperti independensi dan kestasioneran, yang biasanya memudahkan simulasi. Ada metode yang disebut Kinetic Monte Carlo yang menggunakan teknik tertentu untuk mensimulasikan proses-proses ini secara efisien (Andersen et al., 2019). Namun, ketika mensimulasikan proses spasial, seringkali fokusnya adalah pada proses itu sendiri, bukan pada hasil akhirnya. Hal ini membuat penggunaan pendekatan sederhana menjadi lebih sulit. Saat ini, banyak simulasi proses spasial dilakukan dengan teknik yang disebut MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Teknik ini memiliki tantangan tersendiri, seperti memastikan bahwa sampel yang dihasilkan benar-benar independen satu sama lain, yang memerlukan simulasi dalam jumlah sangat besar. Terobosan besar di bidang ini akan berupa pengembangan teknik yang lebih efisien untuk mensimulasikan proses spasial dengan lebih baik.

**E. Peristiwa Langka**

Simulasi peristiwa langka sulit dilakukan karena peristiwa tersebut jarang terjadi dalam simulasi biasa. Peristiwa langka sering muncul dalam masalah seperti menghitung nilai integral yang rumit atau mencari objek yang sangat jarang dalam ruang pencarian yang luas (Clémençon & Portier, 2018). Dengan menggunakan teknik khusus seperti importance sampling atau splitting dapat meningkatkan efisiensi dalam memperkirakan probabilitas terjadinya peristiwa langka. Teori deviasi besar dan metode estimasi adaptif membantu dalam memahami bagaimana sistem berperilaku ketika peristiwa langka terjadi. Namun, mensimulasikan sistem berdasarkan asumsi bahwa peristiwa langka terjadi adalah tantangan yang sulit dan menarik, yang membutuhkan lebih banyak perhatian dan penelitian. Sebagai contoh ekstrem, dapat dikatakan bahwa hukum fisika perlu dipertimbangkan ketika mempelajari peristiwa langka seperti keberadaan manusia

## KESIMPULAN

Metode Monte Carlo menjadi salah satu pendekatan yang paling berguna dalam komputasi ilmiah karena sifatnya yang sederhana namun sangat berlaku luas. Generasi berikutnya dari teknik Monte Carlo akan memberikan perangkat penting yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah estimasi dan optimisasi yang semakin kompleks di berbagai bidang seperti penentuan dosis sinar-X, estimasi biaya projek, dan prediksi jumlah penumpang. Hal ini menandakan bahwa metode Monte Carlo masih relevan dan memiliki potensi besar untuk digunakan dalam pemecahan masalah yang semakin menantang di berbagai disiplin ilmu.

## DAFTAR PUSTAKA

Abud, T. P., Augusto, A. A., Fortes, M. Z., Maciel, R. S., & Borba, B. S. M. C. (2023). State of the Art Monte Carlo Method Applied to Power System Analysis with Distributed Generation. *Energies*, *16*(394), 1–24. https://doi.org/10.3390/en16010394

Alexander Finkler, J. (2023). *Machine Learning in Atomistic Simulations: Enabling the Description of Charge Transfer Effects and Sampling Multi Funnel Systems with Global Monte Carlo Moves*. University of Basel.

Andersen, M., Panosetti, C., & Reuter, K. (2019). A Practical Guide to Surface Kinetic Monte Carlo Simulations. *Frontiers in Chemistry*, *7*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:102347968

Atchadé, Y. F., & Rosenthal, J. S. (2005). On adaptive Markov chain Monte Carlo algorithms ´ 1. *Bernoulli*, *11*(5), 815–828.

Baines, J., Zawlodzka, S., Markwell, T., & Chan, M. (2018). Measured and Monte Carlo simulated surface dose reduction for superficial X-rays incident on tissue with underlying air or bone: *Medical Physics*, *45*(2), 926–933. https://doi.org/10.1002/mp.12725

Bayousef, M., & Mascagni, M. (2019). *A computational investigation of the optimal Halton sequence in QMC applications*. *25*(3), 187–207. https://doi.org/doi:10.1515/mcma-2019-2041

Bhadra, A., & Ionides, E. L. (2016). Adaptive particle allocation in iterated sequential Monte Carlo via approximating meta-models. *Statistics and Computing*, *26*(1–2), 393–407. https://doi.org/10.1007/s11222-014-9513-x

Boleininger, M., Gallauer, M., Dudarev, S. L., Swinburne, T. D., Mason, D. R., & Perez, D. (2020). Statistical mechanics of kinks on a gliding screw dislocation. *Phys. Rev. Res.*, *2*(4), 43254. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.043254

Brahme, A. (2023). TP53 and the Ultimate Biological Optimization Steps of Curative Radiation Oncology. *Cancers*, *15*(17). https://doi.org/10.3390/cancers15174286

Cimini, G., Squartini, T., Saracco, F., Garlaschelli, D., Gabrielli, A., & Caldarelli, G. (2019). The statistical physics of real-world networks. *Nature Reviews Physics*, *1*(1), 58–71. https://doi.org/10.1038/s42254-018-0002-6

Clémençon, S., & Portier, F. (2018). Beating Monte Carlo Integration: a Nonasymptotic Study of Kernel Smoothing Methods. *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:4868555

Di Maio, F., Pettorossi, C., & Zio, E. (2023). Entropy-driven Monte Carlo simulation method for approximating the survival signature of complex infrastructures. *Reliability Engineering and System Safety*, *231*(November 2022), 108982. https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.108982

Doucet, A., Freitas, N., & Gordon, N. (2001). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer.

Ďuriš, V. (2020). Geometric applications of measure as a definite integral in mathematics education. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, *23*(3), 739–753. https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1743507

Fadjar, A. (2008). Monte Carlo Simulation Application in Project Cost Estimation. *SMARTek*, *6*(4), 222–227. http://jurnal.untad.ac.id/jurnal/index.php/SMARTEK/article/view/486

Howell, J. R., & Daun, K. J. (2021). The Past and Future of the Monte Carlo Method in Thermal Radiation Transfer. *Journal of Heat Transfer*, *143*(10). https://doi.org/10.1115/1.4050719

Hu, X., Fang, G., Yang, J., Zhao, L., & Ge, Y. (2022). Simplified models for uncertainty quantification of extreme events using Monte Carlo technique. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, *230*, 108935. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:253189172

Istiqomah, A., & Yulianto, K. (2024). Simulasi Sensitivitas dengan Metode Monte Carlo: Optimasi Penggunaan Metilen Klorida dan Minyak Silikon pada Pembuatan Busa Poliuretan Fleksibel-A Review. *GreenTech*, *1*(2), 250–258.

Khelfaoui, F., & Babahani, O. (2019). How to Use the Monte Carlo Simulation Technique? Application: A Study of the Gas Phase during Thin Film Deposition. In *Theory, Application, and Implementation of Monte Carlo Method in Science and Technology* (pp. 1–21). https://doi.org/10.5772/intechopen.88559

Kouis, P., Papatheodorou, S. I., Middleton, N., Giallouros, G., Kyriacou, K. C., Cohen, J. T., Evans, J. S., & Yiallouros, P. K. (2019). Cost-effectiveness analysis of three algorithms for diagnosing primary ciliary dyskinesia: a simulation study. *Orphanet Journal of Rare Diseases*, *14*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:189814627

Kroese, D. P., Brereton, T., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2014). Why the Monte Carlo method is so important today. *WIREs Comput Stat*, *6*, 386–392. https://doi.org/10.1002/wics.1314

Luengo, D., Martino, L., Bugallo, M., Elvira, V., & Särkkä, S. (2020). A survey of Monte Carlo methods for parameter estimation. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, *25*(1), 1–62. https://doi.org/10.1186/s13634-020-00675-6

Mavrantzas, V. G. (2021). Using Monte Carlo to Simulate Complex Polymer Systems: Recent Progress and Outlook. *Frontiers in Physics*, *9*(661367). https://doi.org/10.3389/fphy.2021.661367

Mufida, Y., & Karo, I. M. K. (2024). PREDIKSI JUMLAH KENDARAAN BERMOTOR DI PULAU SUMATRA MENGGUNAKAN METODE MONTE CARLO. *JATI (Jurnal Mahasiswa Teknik Informatika)*, *8*(4), 5722–5728.

Muhazir, A. (2022). Penerapan Metode Monte Carlo Dalam Memprediksi Jumlah Penumpang Kereta Api (Studi Kasus : Pt.Kai Wilayah Sumatra). *Journal of Science and Social*

*Research*, *5*(1), 151. https://doi.org/10.54314/jssr.v5i1.825

Ohno, K., Esfarjani, K., & Kawazoe, Y. (2018). *Monte Carlo Methods BT - Computational Materials Science: From Ab Initio to Monte Carlo Methods* (K. Ohno, K. Esfarjani, & Y. Kawazoe (eds.); pp. 261–338). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56542-1_5

Restiana, R. (2022). IMPLEMENTATION OF MONTE CARLO SIMULATIONS ON THE FINANCIAL RISKS OF CANTEEN AND MUSHOLA CONSTRUCTION PROJECTS. *Khazanah: Jurnal Mahasiswa*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:248871797

Rizani, A., Setia Budi, W., & Choirul Anam, dan. (2012). Simulasi Monte Carlo Untuk Menentukan Dosis Sinar-X 6 Mv Pada Ketakhomogenan Medium Jaringan Tubuh. *Jurnal Berkala Fisika*, *15*(2), 49–56.

Rubinstein, R. Y., & Kroese, D. P. (2017). *Simulation and The Monte Carlo Method* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Sadek, A. (2021). Monte-Carlo Approach for Measuring Adjusting Cost Risks Values of Residential Building Project's Whole Life Cycle From Clients' Perspective In The United Arab Emirates. *Journal of Entrepreneurship and Project Management*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:238213374

Shi, J., Xu, K., Keyvanloo, A., Udayakumar, T. S., Ahmad, A., Yang, F., & Yang, Y. (2020). A Multimodality Image Guided Precision Radiation Research Platform: Integrating X-ray, Bioluminescence, and Fluorescence Tomography With Radiation Therapy. *International Journal of Radiation Oncology, Biology, Physics*, *108*(4), 1063–1072. https://doi.org/10.1016/j.ijrobp.2020.06.023

Silva, A. M. L. da, & Castro, A. M. de. (2019). Risk Assessment in Probabilistic Load Flow via Monte Carlo Simulation and Cross-Entropy Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, *34*(2), 1193–1202. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2018.2869769

Simola, U., Cisewski-Kehe, J., Gutmann, M. U., & Corander, J. (2019). Adaptive Approximate Bayesian Computation Tolerance Selection. *Bayesian Analysis*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:195776483

Singhee, A., & Rutenbar, R. (2010). Why Quasi-Monte Carlo is Better Than Monte Carlo or Latin Hypercube Sampling for Statistical Circuit Analysis. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions On*, *29*(11), 1763–1776. https://doi.org/10.1109/TCAD.2010.2062750

Smith, P. J., Shafi, M., & Gao, H. (1997). Quick simulation: A review of importance sampling techniques in communications systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, *15*(4), 597–613. https://doi.org/10.1109/49.585771

Tang, Y. (2022). A Note on Monte Carlo Integration in High Dimensions. *The American Statistician*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:249890462

van Ravenzwaaij, D., Cassey, P., & Brown, S. D. (2018). A simple introduction to Markov Chain Monte–Carlo sampling. *Psychonomic Bulletin and Review*, *25*(1), 143–154. https://doi.org/10.3758/s13423-016-1015-8

Yu, L., Gao, S., & Liu, Y. (2015). Pseudo-sequential Monte Carlo simulation for distribution network analysis with distributed energy resources. *2015 5th International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies (DRPT)*, 2684–2689. https://doi.org/10.1109/DRPT.2015.7432702

Zakaria, A., Ismail, F. B., Lipu, M. S. H., & Hannan, M. A. (2020). Uncertainty models for stochastic optimization in renewable energy applications. *Renewable Energy*, *145*, 1543–1571. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.07.081

Zhang, J. (2021). Modern Monte Carlo methods for efficient uncertainty quantification and propagation: A survey. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, *13*(5), 1–23. https://doi.org/10.1002/wics.1539

Zhao, Y., Wang, J., Geng, L., Yuan, Y., & Shuang, Y. (2017). An Extended Cross Entropy Method for Non-sequential Monte Carlo Simulation of Power System Reliability Assessment. *Zhongguo Dianji Gongcheng Xuebao/Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering*, *37*, 1963–1973. https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.160230

Zio, E. (2013). *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. Springer.