

Tinjauan Pustaka Sistematis: Abstraksi Matematis Mahasiswa Pada Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teori APOS

Arfatin Nurrahmah*, Kartono Kartono, Zaenuri Zaenuri, Isnarto Isnarto

Universitas Negeri Semarang, Jl. Kelud Utara III, Petompon, Kec. Gajahmungkur, Kota Semarang, Jawa Tengah 50237, Indonesia

*Corresponding Author: arfatinnurrahmah@students.unnes.ac.id

Abstrak. Pada prinsipnya, hambatan dan kesulitan dalam pembelajaran matematika disebabkan konten dari matematika yang abstrak. Diantara faktor yang menentukan keberhasilan dalam belajar matematika, kemampuan abstraksi matematis adalah yang paling penting. Artikel ini dimaksudkan untuk meninjau studi yang telah dilakukan berdasarkan kerangka teori APOS dalam pembelajaran matematika yang berfokus pada kemampuan abstraksi siswa di tingkat universitas. Untuk menjawab pertanyaan penelitian, dilakukan tinjauan pustaka dengan pencarian dan pemilihan artikel yang sistematis. Pencarian dilakukan melalui *ScienceDirect*, *Education Resource Information Center (ERIC)*, *SCOPUS*, *Springer*, dan *Google Scholar*. Diperoleh 37 artikel internasional dan 4 artikel nasional yang diambil dari berbagai literatur melalui unduhan. Jenis data yang digunakan adalah data sekunder dari artikel tentang abstraksi matematika serta teori APOS dalam pembelajaran matematika di sekolah menengah dan universitas. Metode pengumpulan data adalah dengan membaca artikel tentang abstraksi matematis dan teori APOS. Selanjutnya dilakukan identifikasi terkait abstraksi matematis dalam pembelajaran matematika, pembelajaran matematika berbasis teori APOS, abstraksi matematika, dan model kognisi berbasis teori APOS. Hasil identifikasi tersebut kemudian dianalisis melalui proses kategorisasi dan klasifikasi. Untuk data valid yang akan ditriangulasi sumber artikel adalah penulis pertama. Langkah terakhir mendeskripsikan hasil studi pustaka dan menyimpulkan. Studi literatur menunjukkan bahwa hasil penelitian pada topik tentang abstraksi, model kognisi dan Teori APOS sebagian kecil saling menguatkan dan secara keseluruhan tidak ditemukan konflik antara hasil kajian. Serta pengembangan metode pembelajaran berbasis lembar kerja dan alat bantu pengajaran berdasarkan teori APOS dalam pembelajaran matematika pada sejumlah mata kuliah seperti geometri analitik dan aljabar II dapat meningkatkan prestasi belajar matematika mahasiswa.

Kata kunci: tinjauan pustaka sistematis; abstraksi matematis, teori apos.

Abstract. In principle, obstacles and difficulties in learning mathematics are caused by the content of abstract mathematics. Among the factors that determine success in learning mathematics, mathematical abstraction ability is the most important. This article is intended to review studies that have been carried out based on the APOS theoretical framework in mathematics learning that focuses on students' abstraction skills at the university level. To answer the research questions, a literature review was conducted with a systematic search and selection of articles. Searches were made through *ScienceDirect*, *Education Resource Information Center (ERIC)*, *SCOPUS*, *Springer*, and *Google Scholar*. 37 international articles and 4 national articles were obtained from various kinds of literature via download. The type of data used is secondary data from articles on mathematical abstraction and APOS theory in mathematics learning in secondary schools and universities. The method of data collection is by reading articles on mathematical abstraction and APOS theory. Furthermore, identification is carried out related to mathematical abstraction in mathematics learning, APOS theory-based mathematics learning, mathematical abstraction, and APOS theory-based cognition models. The identification results are then analyzed through the process of categorization and classification. For valid data to be triangulated, the source of the article is the first author. The last step is to describe the results of the literature study and conclude. The literature study shows that the results of research on the topic of abstraction, cognitive models, and APOS theory are partially mutually reinforcing and overall there is no conflict between the results of the study. As well as the development of worksheet-based learning methods and teaching aids based on APOS theory in learning mathematics in a number of subjects such as analytic geometry and algebra II can improve student mathematics learning achievement.

Keywords: systematic literature review; mathematical abstraction; apos theory.

How to Cite: Nurrahmah, A., Kartono K., Zaenuri, Z., Isnarto I. (2022). Tinjauan Pustaka Sistematis: Abstraksi Matematis Mahasiswa Pada Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teori APOS. *Prosiding Seminar Nasional Pascasarjana*, 2022, 120-129.

PENDAHULUAN

Abstraksi matematis merupakan kemampuan yang esensial diperlukan untuk menunjang proses konstruksi objek-objek dan membentuk konsep dalam matematika (Hakim & Nurlaelah, 2018). Berdasarkan sudut pandang kognitif, abstraksi

merupakan satu dari banyak penyebab kegagalan dalam pembelajaran matematika (Hendriana & Fitriani, 2019). Dengan kata lain, kemampuan abstraksi matematis mempengaruhi prestasi hasil belajar siswa (Fitriani & Nurfauliah, 2019). Pembelajaran matematika pada tingkat dasar

melibatkan deskripsi dan objek dari konsep-konsep yang didasarkan pada kasus-kasus nyata yang dialami menurut pengalaman (Yilmaz & Argun, 2018). Dalam matematika tingkat lanjut, proses abstraksi akan lebih sulit karena deskripsi dan objek merupakan skema abstrak yang dibentuk dalam konstruksi mental pada topik-topik yang dipelajari sebelumnya (Salgado & Trigueros, 2015). Di sisi lain kemampuan abstraksi siswa masih rendah dan perlu ditingkatkan baik di level sekolah (Yusepa, 2017; Putra et al., 2018), maupun di level universitas (Widada et al., 2019).

Sebagai sebuah konsep dalam teori pembelajaran matematika, abstraksi telah dipahami dan didefinisikan di berbagai literatur. Menurut Dewi et al (2019), abstraksi adalah proses konstruksi yang sesuai dalam pikiran, melibatkan hubungan antara objek matematika kemudian mengubah hubungan ini menjadi ekspresi yang tidak bergantung pada objek matematika. Abstraksi adalah proses membangun hubungan antar objek dari sudut pandang tertentu. Dalam hal ini mengorganisasi konsep matematika yang dibangun sebelumnya untuk merekonstruksi struktur baru. Abstraksi memungkinkan kita untuk memilih koleksi aksi atau objek mental dan menyimpannya ke dalam memori (Hong & Kim, 2016). Abstraksi adalah proses transisi dari konkret ke abstrak, untuk sekumpulan hal yang sama, dan nama himpunan kemudian akan menjadi nama konsepnya (Widada et al., 2019). Abstraksi adalah kegiatan menyusun konsep matematika yang telah dimiliki sebelumnya ke dalam struktur matematika baru. Aktivitas dalam abstraksi adalah mengenali, mengatur dan membangun. Mengenali adalah proses mengidentifikasi struktur matematika yang telah ada sebelumnya. Pengorganisasian adalah proses menggunakan pengetahuan struktural untuk dirangkai menjadi solusi dari suatu masalah dan konstruksi adalah proses pengorganisasian ciri-ciri objek ke dalam struktur baru yang belum ada (Annas et al., 2018).

Abstraksi telah menjadi fokus perhatian penelitian tentang berbagai topik dalam matematika seperti aljabar linier, kalkulus dan geometri sebagai upaya untuk mencapai pengajaran dan pembelajaran yang ideal (Fitriani et al., 2018). Dalam rangka menunjang pengajaran dan pembelajaran matematika diperlukan pemahaman tentang bagaimana konsepsi matematika dikonstruksi. Dalam pengertian ini, sangatlah penting untuk memiliki deskripsi yang akurat tentang proses yang

digunakan untuk mengembangkan pengetahuan matematika. Pengembangan teori atau model dalam pendidikan matematika merupakan bagian dari upaya untuk memahami bagaimana matematika dapat dipelajari dan apa yang dapat dilakukan program pendidikan untuk membantu dalam pembelajaran tersebut (Arnon et al., 2014). Oleh karena itu, penguraian tentang komposisi genetik dengan kerangka teori APOS diharapkan dapat berfungsi sebagai panduan yang berguna untuk pengajar dalam menyusun konstruksi materi pelajaran, modul dan model pembelajaran yang diterapkan.

Dalam teori APOS terdapat empat jenis struktur mental yang terlibat dalam memahami konsep matematika yaitu Tindakan (*Action*), Proses (*Process*), Objek (*Object*), dan Skema (*Scheme*) (Cetin & Dubinsky, 2017). Aksi merujuk pada konstruksi pemahaman tentang konsep matematika yang melibatkan transformasi terhadap objek sebagai reaksi terhadap rangsangan dari luar. Suatu proses adalah struktur mental yang melakukan operasi yang sama dengan tindakan yang di-interiorisasi, tetapi sepenuhnya dalam pikiran individu, sehingga memungkinkan dia untuk membayangkan melakukan transformasi tanpa harus melaksanakan setiap langkah secara eksplisit (Dubinsky et al., 2005). Sementara itu, konsepsi tentang objek diartikan sebagai bentuk pemahaman terhadap suatu konsep matematika yang merupakan penerapan dari aksi dan proses. Konsepsi tentang skema diartikan sebagai kumpulan aksi, proses, objek yang saling berkaitan (Permatasari & Susana, 2019). Dekomposisi genetik adalah model hipotetis yang menggambarkan struktur mental dan mekanisme yang mungkin perlu dibangun oleh siswa untuk mempelajari konsep matematika tertentu. Ini biasanya dimulai sebagai hipotesis berdasarkan pengalaman peneliti dalam pembelajaran dan pengajaran konsep, pengetahuan mereka tentang Teori APOS, pengetahuan matematika mereka, penelitian yang dipublikasi sebelumnya tentang konsep, dan perkembangan historis konsep tersebut. Sampai sebelum diuji secara eksperimental, dekomposisi genetik merupakan sebuah hipotesis dan disebut sebagai permulaan (Arnon et al., 2014).

Berdasarkan penjabaran di atas, maka tujuan dari artikel ini adalah untuk meninjau dan mengevaluasi bagaimana penelitian dengan kerangka kerja teori APOS telah berkontribusi untuk memajukan pengetahuan dan pemahaman tentang hubungan antara kemampuan abstraksi

dan model kognisi siswa dalam pembelajaran matematika. Pertama, akan ditinjau kekayaan penelitian tentang abstraksi matematika dalam pembelajaran matematika, menyoroti kesamaan serta perbedaan dalam model dan metode penelitian. Kedua, memeriksa bagaimana penelitian berdasarkan teori APOS dalam pembelajaran matematika dapat menjadi kerangka yang ideal untuk menunjang kegiatan belajar mengajar. Ketiga, secara singkat memperkecil fokus pada kajian yang menguak model kognisi siswa sebagai rancangan awal atau hipotesis konstruksi materi yang disebut dekomposisi genetik. Mengulas kontribusi dan keterbatasan penelitian yang berfokus pada kemampuan abstraksi matematis dan dekomposisi genetik dalam pembelajaran matematika dengan kerangka kerja teori APOS, serta merekomendasikan kajian lebih lanjut yang perlu dilakukan.

METODE

Untuk menjawab pertanyaan penelitian, lakukan tinjauan pustaka dengan pencarian dan pemilihan artikel yang sistematis. Pencarian dilakukan melalui *ScienceDirect*, *Education Resource Information Center (ERIC)*, *SCOPUS*, *Springer*, dan *Google Scholar*. Artikel yang ditulis dalam bahasa Inggris dan Indonesia diterbitkan antara tahun 2005 dan 2020. Diperoleh 37 artikel internasional dan 4 artikel nasional yang diambil dari berbagai literatur melalui unduhan. Jenis data yang digunakan adalah data sekunder dari artikel tentang abstraksi matematika serta teori APOS dalam pembelajaran matematika di sekolah menengah dan universitas. Metode pengumpulan data adalah dengan membaca artikel tentang abstraksi matematis dan teori APOS. Selanjutnya dilakukan identifikasi terkait abstraksi matematis dalam pembelajaran matematika, pembelajaran matematika berbasis teori APOS, abstraksi matematika, dan model kognisi berbasis teori APOS. Hasil identifikasi tersebut kemudian dianalisis melalui proses kategorisasi dan klasifikasi. Untuk data valid yang akan ditriangulasi sumber artikel adalah penulis pertama. Langkah terakhir menjelaskan hasil tinjauan pustaka dan menyimpulkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam literatur sangat banyak penelitian tentang konstruksi mental siswa dan abstraksi matematis pada pembelajaran matematika berdasarkan teori APOS yang dapat ditemukan.

Sejumlah besar studi tersebut akan dibahas di bagian ini dan diringkas di bagian akhir untuk mempermudah klasifikasi. Untuk kajian yang lebih jelas, kajian-kajian tersebut diklasifikasikan menjadi tiga kategori. Pertama, studi yang berfokus pada fitur umum tentang abstraksi matematis pada pembelajaran matematika diilustrasikan terlebih dahulu. Kedua, dibahas studi tentang abstraksi matematis berdasarkan teori APOS. Ketiga, disajikan kajian tentang model kognisi dan abstraksi matematis berdasarkan teori APOS.

Abstraksi Matematis pada Pembelajaran Matematika

Mengingat akan pentingnya kemampuan abstraksi matematis siswa dalam keberhasilan pembelajaran, peneliti memberi fokus yang masif dengan kajian-kajian yang telah dan akan terus dilakukan. Para peneliti seringkali menguji dan mengungkapkan kemampuan abstraksi siswa sebagai acuan untuk merancang perbaikan dalam bentuk Lembar Kerja, model dan alat bantu ajar. Deskripsi kualitatif memberikan deskripsi yang rinci, namun sejumlah laporan tidak memberikan rekomendasi yang jelas tentang apa yang harus diperbaiki ke depannya. Berikut akan disajikan tentang sejumlah kajian abstraksi dalam pembelajaran matematika, menyoroti kontribusi dan batasan masing-masing penelitian.

Putra et al (2018), mengeksplorasi kemampuan abstraksi matematis mahasiswa yang melibatkan 6 orang dengan kemampuan matematika berbeda. Dilaporkan bahwa rendahnya kemampuan abstraksi matematis siswa paling tidak disebabkan karena mahasiswa tidak terbiasa dengan argumentasi yang terstruktur dan sistematis, cenderung lupa pada susunan argumentasi dalam menjelaskan suatu konsep matematika. Darwish (2014) menguji tingkat berpikir abstrak 133 mahasiswa Jurusan Pendidikan Sains di dua Universitas. Hasil penelitian menunjukkan adanya korelasi positif antara nilai tes berpikir abstrak siswa dengan prestasi belajar di perguruan tinggi. Dilaporkan juga bahwa terdapat kesenjangan dalam tingkat berpikir abstrak, antara tingkat berpikir saat ini dengan yang diharapkan dari siswa. Mahasiswa belum mencapai tingkat abstrak minimum yang seharusnya untuk menjadi guru yang mengajar sains di sekolah menengah.

Nurhasanah et al (2018), mengungkap proses abstraksi calon guru matematika dalam pembelajaran konsep koordinat paralel dalam pembelajaran geometri analitik. Partisipan dalam

penelitian ini terdiri dari 45 guru matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat hubungan linier antara skor pada koordinat kartesius dan koordinat paralel. Juga ditemukan bahwa tingkat yang lebih tinggi dari proses abstraksi dalam pembelajaran koordinat paralel secara linier berhubungan dengan prestasi siswa yang lebih tinggi dalam geometri analitik. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa konsep koordinat Paralel memiliki peran yang signifikan bagi guru matematika prajabatan dalam pembelajaran Geometri Analitik.

Komala (2018), mendeskripsikan kemampuan abstraksi matematis siswa dengan pendekatan diskursif integrasi pembelajaran teman sebaya, mengungkap masalah yang dihadapi siswa dan mempelajari intervensi yang diperlukan siswa untuk mengatasi masalah tersebut. Berdasarkan analisis data, hasil penelitian menunjukkan bahwa kemampuan abstraksi matematika siswa pada mata kuliah Aljabar II tidak melebihi 85% dari kriteria ideal yang ditentukan. Hambatan yang dihadapi siswa antara lain hambatan kognitif, hambatan genetik dan psikologis, hambatan didaktik, hambatan epistemologis. Intervensi yang perlu diberikan antara lain dengan memberikan penguatan penguasaan materi prasyarat, pengkondisian melalui drill, practice, dan exercise, pemberian scaffolding, peningkatan kesadaran siswa terhadap apa yang dipelajari, intervensi konvergen berupa pertanyaan investigasi tertutup.

Dewi et al (2018), berupaya mendeskripsikan topik geometri dengan alat bantu mengajar untuk meningkatkan kemampuan abstraksi siswa. Hasil yang diperoleh adalah: (1) Kemampuan siswa sangat heterogen, (2) Siswa Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) lebih terampil dalam mendeskripsikan tiga dimensi dibandingkan dengan siswa Sekolah Menengah Atas (SMA), (3) Alat peraga tiga dimensi diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan geometri, (4) Dari keenam kelompok yang diteliti, hanya satu kelompok yang menjawab benar tentang volume benda tiga dimensi, dan (5) skor rata-rata dari ketiga soal adalah 85, 53, dan 43.

Berdasarkan beberapa penelitian di atas, diambil kesimpulan bahwa kemampuan abstraksi dapat berpengaruh terhadap capaian prestasi akademik seorang siswa pada pembelajaran matematika. Kemampuan abstraksi itu sendiri, dapat ditingkatkan dengan menerapkan berbagai strategi, model, serta media dalam pembelajaran matematika, atau pada mata kuliah tertentu.

Pembelajaran Matematika berdasarkan Teori APOS

Fokus pada bagian ini adalah menggambarkan bagaimana Teori APOS (aksi, proses, objek dan skema) dapat menjadi kerangka kerja dalam mengidentifikasi sejumlah kemampuan matematika siswa dalam pembelajaran matematika di tingkat universitas. Tidak hanya itu, sejumlah kajian menggunakan kerangka Teori APOS untuk mengembangkan model pembelajaran. Prihandhika et al (2020), berhasil mengidentifikasi kendala epistemologis mahasiswa pada konsep dasar turunan yang melibatkan 6 orang mahasiswa pendidikan matematika dari dua universitas berbeda. Temuan menunjukkan bahwa terdapat beberapa kendala pembelajaran yang dialami mahasiswa pendidikan matematika dalam memahami konsep dasar turunan. Kendala yang dialami antara lain kurangnya keterampilan koneksi matematis mengenai konsep dasar turunan, pengoperasian suatu fungsi yang masih salah, dan kurangnya proses yang bermakna untuk konsep yang dipelajari sehingga proses pemecahan masalah masih terbatas pada masalah prosedural. Kajian dapat menjadi rujukan sebagai acuan untuk menerapkan dan mengembangkan model untuk mengatasi masalah-masalah yang dilaporkan.

Arnawa, et al (2019), mengembangkan Lembar Kerja di Universitas berbasis pendekatan teori APOS untuk meningkatkan prestasi belajar mahasiswa dalam pembelajaran sistem persamaan linier (SLE). Laporan menyimpulkan bahwa Lembar Kerja sistem pembelajaran persamaan linier berbasis pendekatan teori APOS dinyatakan valid, praktis dan efektif. Penelitian lain yang dilakukan oleh Istikomah & Jana (2019), mengukur kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa dalam penerapan model pembelajaran APOS Modified Learning (M-APOS). Observasi, tes, dan wawancara melibatkan 37 responden mahasiswa Program studi Pendidikan Matematika. Dari hasil analisis diketahui bahwa indikator kemampuan memahami masalah, merencanakan penyelesaian, dan menyelesaikan masalah sesuai rencana persentase tertinggi terdapat pada siswa berkemampuan tinggi dengan persentase 76,12%, 60,05%, dan 44,68%. Artinya, kemampuan mahasiswa dalam memahami masalah, merencanakan penyelesaian, dan melaksanakan rencana dalam penerapan model pembelajaran M-APOS termasuk dalam kategori baik. Sedangkan untuk indikator telaah ulang untuk

semua tahapan resensi, persentase tertinggi pada kategori kemampuan sedang dengan persentase 39,28%. Pelaksanaan pembelajaran APOS pada penelitian ini berada pada kategori sangat baik. Penelitian lain yang juga serupa dilakukan oleh Afgani et al (2017), mengungkapkan tingkat kemampuan pemahaman matematis mahasiswa berdasarkan perspektif teori APOS. Observasi dilakukan pada 59 mahasiswa Pendidikan Matematika di sebuah Universitas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sebagian besar siswa masih dalam tahap konsepsi tindakan. Mereka dapat menghitung dan menggunakan prosedur dengan tepat pada objek matematika yang diberikan, tetapi belum dapat mencapai konsepsi yang lebih tinggi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa 10,17% siswa melakukan kesalahan dalam penghitungan, 69,49% siswa tidak dapat memanipulasi aljabar, 91,53% siswa tidak dapat mengidentifikasi adanya batasan fungsi, 98,31% siswa menyatakan kesalahan grafik yang tidak relevan dengan kondisi yang diberikan, dan 83,05% siswa tidak dapat menghasilkan skema yang diperlukan untuk membuktikan validitas pernyataan batas fungsi.

Dapat dilihat bahwa kajian-kajian diatas tidak memberikan kontribusi pedagogis secara langsung, namun sudah cukup untuk dijadikan pijakan untuk melakukan kajian selanjutnya seperti menerapkan model pembelajaran dan mendiskripsikan kesulitan yang dihadapi mahasiswa yang ditemukan dalam kajian-kajian tersebut. Selanjutnya akan kita lihat sejumlah penelitian yang berupaya mengungkap kesulitan yang dihadapi siswa dan mengembangkan metode pembelajaran baik berupa model, LKS atau media pembelajaran.

Selanjutnya, penelitian yang dilakukan Arnawa et al (2020), berupaya meningkatkan kemampuan pembuktian mahasiswa pada mata kuliah aljabar abstrak berbasis proses belajar mengajar melalui pendekatan teori APOS dan untuk mengetahui tingkat pemahaman mahasiswa dalam mata kuliah aljabar abstrak. Tes kemampuan pembuktian diberikan kepada mahasiswa peserta mata kuliah aljabar abstrak tahun ajaran 2018/2019 di Universitas Andalas. Laporan ini membagi kemampuan pembuktian siswa dalam tiga kategori, yaitu: tingkat 1 sintaksis, tingkat 2 semantik konkret dan tingkat 3 semantik abstrak. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) 30% siswa mencapai level 3, 50% siswa mencapai level 2, 14% siswa mencapai level 1, 3% siswa mencapai level 0 dan 3% tidak termasuk kategori level 0, level 1, level 2, dan

level 3; (2) Sebagian besar siswa mengalami kesulitan dalam mempelajari Aljabar Abstrak; (3) Siswa yang diberikan pembelajaran berbasis pendekatan teori APOS memiliki rata-rata skor kemampuan pembuktian berbeda dari 45 pada tingkat signifikan 0,05; (4) Terdapat kesenjangan gender dalam kemampuan pembuktian siswa dalam Aljabar Abstrak, tetapi secara statistik tidak signifikan. Kajian yang hamper sama dilakkan juga oleh Arnawa et al (2019), dimana melaporkan pentingnya meningkatkan sikap mahasiswa dalam pembelajaran di mata kuliah aljabar abstrak. Kajian melibatkan 50 mahasiswa di Universitas Andalas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) Pendekatan teori APOS dapat meningkatkan sikap siswa terhadap aljabar abstrak dan pembelajarannya (2) Tidak terdapat kesenjangan gender dalam sikap siswa terhadap aljabar abstrak dan pembelajarannya. (3) Ada korelasi positif antara sikap terhadap aljabar abstrak dan pembelajarannya.

Dua penelitian di atas memberikan temuan yang perlu dikaji lebih lanjut yaitu tentang kesenjangan gender, karena temuan ini sedikit berbeda dengan hasil temuan Arnawa et al (2020) juga pada mata kuliah Aljabar Abstrak. Selain itu, kajian yang kami srankan selanjutnya adalah mendeskripsikan bagaimana pendekatan teori apos dapat meningkatkan sikap siswa terhadap pembelajaran Aljabar Abstrak. Hasil laporan juga menyisakan pekerjaan selanjutnya tentang bagaiman sikap mahasiswa jika dengan model pembelajaran yang berbeda dan mengungkap kesulitan mahasiswa secara kualitatif deskriptif.

Tokgoz (2015) dalam penelitiannya, mempelajari pengetahuan konseptual mahasiswa sarjana dan pascasarjana senior tentang definisi integral tertentu Riemann yang diamati dengan menggunakan teori APOS. 17 peserta studi ini terdaftar atau baru saja menyelesaikan kuliah Metode Numerik universitas selama semester di Amerika Serikat. Hasil penelitian ini menunjukkan kemampuan aljabar dari subjek saat menyelesaikan pertanyaan integral Riemann masih relative lemah. Laporan temuan tidak memberikan kontribusi pedagogis scara langsung, namun hasil yang ditampilkan dapat sangat berguna bagi para pengajar untuk mengetahui tantangan yang dapat dihadapi siswa dan pada tahap apa siswa matematika menghadapi kesulitan saat menyelesaikan soal integral. Diantara kajian yang bisa diajukan adalah mengungkap kesulitan yang dihadapi oleh mahasiswa serta mengembangkan metode pembelajaran baik berupa model, lembar kerja

atau diktat.

Borji & Martínez (2020), menerapkan Teori APOS untuk mengetahui pemahaman mahasiswa tentang diferensial implisit dalam konteks fungsi satu variabel pada 25 mahasiswa yang telah menyelesaikan kursus kalkulus variabel tunggal. Hasil menunjukkan bahwa gagasan aturan rantai dan fungsi implisit memainkan peran kunci dalam kemungkinan mencapai koherensi Skema diferensiasi implisit. Untuk ini, mahasiswa perlu membangun setidaknya konsep Proses fungsi implisit dan skema aturan rantai dengan koherensi yang diberikan oleh komposisi fungsi. Studi ini menunjukkan bahwa siswa yang mengambil kursus kalkulus pengantar dapat mengalami kesulitan memahami gagasan utama diferensiasi implisit kecuali jika kegiatan khusus dirancang untuk membantu mereka membuat hubungan yang diperlukan antara komponen Skema diferensiasi implisit. Studi tersebut menyarankan kebutuhan untuk menyelidiki lebih lanjut pelaksanaan kegiatan yang mendorong konstruksi yang diusulkan, di buku teks dan ruang kelas.

Abstraksi Matematis dan Model Kognisi berdasarkan Teori APOS

Teori APOS pada dasarnya adalah model untuk menggambarkan bagaimana konsep matematika dapat dipelajari. Ini adalah kerangka kerja yang digunakan untuk menjelaskan bagaimana individu secara mental membangun pemahaman mereka tentang konsep matematika. Dari perspektif kognitif, konsep matematika tertentu dibingkai dalam istilah dekomposisi genetiknya, sebuah deskripsi tentang bagaimana konsep tersebut dapat dikonstruksi dalam pikiran individu. Selanjutnya, mari kita lihat fitur yang paling menarik dari kerangka teori APOS yaitu dekomposisi genetik dapat menjadi sumber acuan yang baik dalam merancang proses pembelajaran dalam matematika.

Pemodelan didaktik yang dirancang dengan teori kognitif dapat membantu siswa meningkatkan kemampuan abstraksi matematis untuk mencapai pemahaman yang utuh tentang konsep pada pembelajaran matematika. Hal ini dibuktikan oleh (Figueroa et al., 2018), mengajukan pemodelan didaktik sebagai pemandu proses belajar mengajar untuk meningkatkan kemampuan abstraksi siswa. Pemodelan didaktik dirancang menurut Dekomposisi Genetik berdasar teori APOS dalam kuliah Aljabar Linier di tingkat universitas pada materi pembelajaran perkalian matriks.

Implementasi rancangan didaktik yang dikembangkan berdasarkan Dekomposisi genetik yang diusulkan terbukti dapat mendorong pembelajaran siswa dalam kuliah aljabar linier. Lebih spesifik penelitian menunjukkan bahwa pemodelan menjadi fundamental dalam membantu siswa untuk membangun dan mengembangkan strategi abstraksi. Studi ini juga menyajikan secara komperhensif model kognisi dari siswa selama proses pengajaran yang dapat dijadikan rujukan untuk merancang dekomposisi genetik dalam materi kuliah Aljabar linier khususnya dan matematika pada umumnya.

Martínez & Parraguez (2017), juga berhasil secara rinci menyajikan model kognitif dari mahasiswa dan mengajukan dekomposisi genetik pada kuliah Prinsip Induksi Matematis di perguruan tinggi. Dekomposisi genetik yang dirancang berdasarkan observasi dan hasil pengukuran awal pada kelas, dimana memperkenalkan dan mendefinisikan langkah dasar dalam Prinsip Induksi Matematis sebagai proses mental. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dekomposisi genetik yang dirumuskan layak dan bahwa dimasukkannya langkah dasar sebagai proses mental terlihat dalam model kognitif PMI yang ditunjukkan oleh siswa. Temuan memberikan kontribusi pedagogis yang menjajikan dalam mencapai proses pembelajaran yang diharapkan. Meski demikian, laporan masih perlu dilanjutkan dengan materi atau mata kuliah yang berbeda untuk memperoleh validasi dari kontribusi tersebut.

Salgado & Trigueros (2015), melakukan investigasi pengalaman kelas di mana nilai eigen, vektor eigen, dan ruang eigen diajarkan menggunakan masalah pemodelan dan aktivitas berdasarkan Teori APOS. Laporan menunjukkan bagaimana 3 siswa mampu membangun konsep objek dari konsep-konsep sulit ini dalam satu semester kuliah, sesuatu yang literatur yang ada telah terbukti hampir tidak mungkin untuk dicapai. Menggunakan satu tim sebagai studi kasus, kami mendeskripsikan pekerjaan yang dilakukan oleh 30 siswa untuk menunjukkan bagaimana vektor eigen dan nilai eigen muncul dalam diskusi kelompok. Kajian ini juga memvalidasi dekomposisi genetik yang dirancang berdasar konstruksi mental dari responden yang diperoleh selama penelitian. Singkatnya, hasil menunjukkan pendekatan yang menjanjikan dalam pembelajaran nilai eigen dan vektor eigen. Salah satu hasil penting dari penelitian ini adalah bagaimana pengenalan masalah pemodelan yang memadai membantu

siswa terlibat secara mendalam dalam pemecahannya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pekerjaan model memungkinkan siswa untuk mengembangkan strategi yang mempromosikan penggunaan konsep yang dibangun sebelumnya, dan memberikan siswa akses ke pertanyaan dan konsep baru tanpa bantuan guru.

Nisa et al (2020), meninjau keberhasilan penerapan Teori APOS dengan pendekatan pembelajaran model ACE pada mahasiswa dalam materi Riemann Sum untuk memunculkan abstraksi reflektif. Dokumentasi, observasi, tes dan wawancara mendalam terhadap 32 orang siswa Pendidikan Matematika. Implementasi teori APOS dengan pendekatan pembelajaran model ACE berhasil memunculkan abstraksi reflektif. Hal ini dipengaruhi oleh dekomposisi genetik, LKS atau sumber belajar, pendampingan dan penguatan oleh pendidik serta penguatan materi prasyarat. Proses abstraksi reflektif dalam materi Riemann Sum terjadi melalui mekanisme interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, dan tematisasi. Interiorisasi terjadi ketika siswa melakukan tindakan yang semula dilakukan pada persegi panjang berhingga menjadi n persegi panjang. Proses ini juga dibangun ketika siswa berhasil mengoordinasikan tindakan dengan pendekatan titik tengah. Sedangkan struktur objek hanya dibentuk melalui mekanisme enkapsulasi dan skema dibentuk hanya melalui tematisasi. Meski panduan pedagogis dari rancangan dekomposisi genetik memberikan hasil yang positif, namun Dekomposisi genetik yang diajukan masih umum dan tidak berdasarkan pada konstruksi mental subjek yang diamati, pekerjaan lebih lanjut disarankan untuk memvalidasi rancangan dekomposisi genetik.

Borji et al (2018), menerapkan APOS-ACE untuk mendalami proses belajar mengajar Turunan dengan memberikan penekanan pada pemahaman grafisnya pada sekelompok mahasiswa. Pekerjaan ini juga mengusulkan Dekomposisi Genetik yang dikembangkan berdasarkan hasil studi sebelumnya dan pengalaman mengajar. Hasil dari implementasi juga dibandingkan dengan kelompok siswa lain yang setara, di mana subjek diajarkan dengan cara tradisional berbasis ceramah. Temuan menunjukkan siswa yang berada di kelompok eksperimen menunjukkan pemahaman yang lebih baik tentang turunan dibandingkan dengan kelompok kontrol. Deskripsi secara kualitatif diperlukan untuk memberikan panduan pedagogis yang komprehensif serta mengungkap

konstruksi mental dari subjek. Saran lanjutan yang dapat diajukan adalah maembandingkan model ACE dengan model lain serta mengungkap konstruksi mahasiswa untuk menguji dan menyempurnakan Dekomposisi Genetik.

Borji & Voskoglou (2016), mengembangkan sebuah Dekomposisi Genetik dalam hal perlakuan instruksional APOS matematika, untuk pengajaran dan pembelajaran koordinat kutub. Desain Dekomposisi Genetik didasarkan pada kesimpulan yang diperoleh dengan tes tertulis dan wawancara lisan yang dilakukan pada 26 orang mahasiswa dari program studi fisika yang telah menyelesaikan kuliah kalkulus multivariabel yang melibatkan konsep koordinat kutub. Kesulitan siswa untuk memahami dan menggunakan koordinat kutub yang tepat terkait dengan pengetahuan mereka sebelumnya yang tidak lengkap tentang bilangan dan fungsi trigonometri dan tentang koordinat dan persamaan Cartesian dan dengan masalah yang berkaitan dengan koordinat kutub dan persamaan dan transisi dari kutub ke koordinat Cartesian dan sebaliknya. Kesimpulan di atas mengarahkan kami pada desain Dekomposisi Genetik awal termasuk tindakan, proses, dan objek yang mungkin perlu dibuat oleh siswa untuk mempelajari dan memahami koordinat kutub. Saran lanjutan dari kajian ini diantaranya penelitian yang melibatkan pengembangan dan implementasi urutan instruksional siklus ACE serta pengumpulan dan analisis data baru dari siswa untuk menguji dan menyempurnakan Dekomposisi Genetik dan desain model pembelajaran ACE.

SIMPULAN

Kesimpulan yang dicapai antara lain 1) Studi literatur menunjukkan bahwa hasil penelitian pada topik abstraksi, model kognitif, dan teori APOS sebagian saling menguatkan, dan secara keseluruhan tidak terdapat pertentangan antara hasil penelitian; 2) Pengembangan metode pembelajaran berbasis LKS dan alat peraga berbasis teori APOS dalam pembelajaran matematika pada beberapa mata pelajaran seperti geometri analitik dan aljabar II dapat meningkatkan prestasi belajar matematika siswa; 3) Dekomposisi genetik diperlukan sebagai panduan bagi guru untuk merancang instrumen untuk mencapai pembelajaran yang ideal, namun hanya sedikit literatur yang mengkonstruksi model kognitif siswa secara mendalam; 4) Materi yang disusun menurut dekomposisi genetik yang dirancang dari model kognisi siswa berdasarkan

teori APOS terbukti mampu meningkatkan kemampuan abstraksi matematis siswa pada beberapa mata pelajaran seperti statistik matematika, aljabar linier, kalkulus multivariabel, dan analisis riil.

REFERENSI

- Afgani, M. W., Suryadi, D., & Dahlan, J. A. (2017). Analysis of Undergraduate Students' Mathematical Understanding Ability of the Limit of Function Based on APOS Theory Perspective. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012056>
- Annas, S., Djadir, & Hasma, S. M. (2018). The Abstraction Ability in Constructing Relation Within Triangles by the Seventh Grade Students of Junior High School. *Journal of Physics: Conference Series*, 954(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/954/1/012029>
- Arnawa, I. M., Yanita, Ginting, B., Yerizon, & Nita, S. (2020). Improvement a positive attitude towards abstract algebra through APOS theory approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1503(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1503/1/012008>
- Arnawa, I. M., Yerizon, & Nita, S. (2020). Improvement students' achievement in elementary linear algebra through APOS theory approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1567(2). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1567/2/022080>
- Arnawa, I. Made, Yerizon, Nita, S., & Putra, R. T. (2019). Development of students' worksheet based on apos theory approach to improve student achievement in learning system of linear equations. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 8(4), 287–292.
- Arnawa, I. Made, Yerizon, Y., & Nita, S. (2019). Improvement Students' Level of Proof Ability in Abstract Algebra Trough APOS Theory Approach. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 8(7), 128–131.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, R. S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory- A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. In *Springer Science+Business Media New York* (Vol. 71, Issue 3). <https://doi.org/10.5840/acpq199771338>
- Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2947–2967. <https://doi.org/10.29333/ejmste/91451>
- Borji, V., & Gr Voskoglou, M. (2016). Applying the APOS Theory to Study the Student Understanding of Polar Coordinates. *American Journal of Educational Research*, 4(16), 1149–1156. <https://doi.org/10.12691/education-4-16-5>
- Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, 105(2), 163–179. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y>
- Cetin, I., & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 47(July), 70–80. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.004>
- Darwish, A. H. (2014). The abstract thinking levels of the science-education students in gaza universities. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, 15(2), 1–24.
- Dewi, I., Andriani, A., Medan, U. N., & Medan, U. N. (2019). *Pengembangan lembar kerja siswa (lks) berbasis budaya melayu untuk meningkatkan kemampuan abstraksi matematis*. 160–167.
- Dewi, M. L., Hakim, A. R., Setiawan, A., Adhisuwignjo, S., & Rohadi, E. (2018). Mathematics teaching Aids to improve the students abstraction on Geometry in Civil Engineering of State Polytechnic Malang. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 434(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/434/1/012004>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335–359. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z>
- Figuerola, A. P., Possani, E., & Trigueros, M. (2018). Matrix multiplication and transformations: an APOS approach. *Journal of Mathematical Behavior*, 52(October

- 2017), 77–91.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.002>
- Fitriani, N., & Nurfauziah, P. (2019). Gender and mathematical abstraction on geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1315(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1315/1/012052>
- Fitriani, N., Suryadi, D., & Darhim, D. (2018). Analysis of mathematical abstraction on concept of a three dimensional figure with curved surfaces of junior high school students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012037>
- García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 46(April), 128–143. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.001>
- Hakim, L. L., & Nurlaelah, E. (2018). Mathematical mindsets: The abstraction in mathematical problem solving. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012048>
- Hendriana, H., & Fitriani, N. (2019). Mathematical Abstraction of Year 9 Students Using Realistic Mathematics Education Based on the Van Hiele Levels of Geometry. *Jurnal Didaktik Matematika*, 6(1), 1–12. <https://doi.org/10.24815/jdm.v6i1.13285>
- Hong, J. Y., & Kim, M. K. (2016). Mathematical abstraction in the solving of ill-structured problems by elementary school students in Korea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(2), 267–281. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1204a>
- Istikomah, D. A., & Jana, P. (2019). Mathematical Problem Solving Ability in Apos Modified Learning Model (M-APOS). *Journal of Physics: Conference Series*, 1254(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1254/1/012071>
- Komala, E. (2018). Analysis of Students' Mathematical Abstraction Ability By Using Discursive Approach Integrated Peer Instruction of Structure Algebra Ii. *Infinity Journal*, 7(1), 25. <https://doi.org/10.22460/infinity.v7i1.p25-34>
- Martínez-Planell, R., & Cruz Delgado, A. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 43, 111–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.002>
- Nisa, L. C., Waluya, S. B., Kartono, & Mariani, S. (2020). Implementation of APOS theory to encourage reflective abstraction on Riemann Sum. *Journal of Physics: Conference Series*, 1567(3). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1567/3/032014>
- Nurhasanah, F., Kusumah, Y. S., Sabandar, J., & Suryadi, D. (2018). Relationship between mathematical abstraction in learning parallel coordinates concept and performance in learning analytic geometry of pre-service mathematics teachers: An investigation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012130>
- Nurlaelah, E. (2015). Model Pemberian Tugas Resitasi (M-Apos) Yang Dilaksanakan Dengan Bahasa Inggris Dalam Mengembangkan Kemampuan Komunikasi Matematis Dan Kepercayaan Diri Mahasiswa Calon Guru. *Jurnal Pengajaran Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 17(2), 173. <https://doi.org/10.18269/jpmipa.v17i2.232>
- Permatasari, R. dian, & Susanah. (2019). MATHE dunesa. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 1(5), 59–66. <https://jurnalmahasiswa.unesa.ac.id/index.php/mathedunesa/article/view/25554/23429>
- Prihandhika, A., Prabawanto, S., Turmudi, T., & Suryadi, D. (2020). Epistemological Obstacles: An Overview of Thinking Process on Derivative Concepts by APOS Theory and Clinical Interview. *Journal of Physics: Conference Series*, 1521(3). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1521/3/032028>
- Putra, J. D., Suryadi, D., & Juandi, D. (2018). Mathematical abstraction ability of prospective math teacher students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/01204>
- Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100–120.

- <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005>
- Tokgoz, E. (2015). Analysis of STEM majors' calculus knowledge by using APOS theory on a quotient function graphing problem. *ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings, 122nd ASEE(122nd ASEE Annual Conference and Exposition: Making Value for Society)*. <https://doi.org/10.18260/p.23552>
- Tokgoz, E. (2016). Evaluation of engineering & mathematics majors' Riemann integral definition knowledge by using APOS theory. *ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings, 2016-June*. <https://doi.org/10.18260/p.26777>
- Widada, W., Agustina, A., Serlis, S., Dinata, B. M., & Hasari, S. T. (2019). The abstraction ability of students in understanding the concept of geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1318(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1318/1/012082>
- Widada, Wahyu, Herawaty, D., Zaid Nugroho, K. U., & Dwi Anggoro, A. F. (2019). The ability to Understanding of the Concept of Derivative Functions for Inter-Level Students during Ethnomathematics Learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1179(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1179/1/012056>
- Yilmaz, R., & Argun, Z. (2018). Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 6(1), 41–57. <https://doi.org/10.18404/ijemst.328337>
- Yusepa, B. (2017). Kemampuan Abstraksi Matematis Siswa Sekolah Menengah Pertama (Smp) Kls Viii. *Symmetry: Pasundan Journal of Research in Mathematics Learning and Education*, 1. <https://doi.org/10.23969/symmetry.v1i1.233>